

**FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO**



# **Conversor eletrónico de potência para sistema híbrido de armazenamento de energia**

**Gonçalo André Maio Dias**

Mestrado Integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Orientador: Prof. Dr. Rui Manuel Esteves Araújo

22 de Julho de 2016



# Resumo

Neste documento será debatida a temática dos sistemas híbridos de armazenamento de energia. O problema proposto inclui o estudo de conversores bidirecionais em corrente, o que implica a revisão literária sobre algumas topologias. O conversor Cuk, o dual half-bridge e o dual active bridge serão os conversores falados no documento.

O conversor Cuk terá uma abordagem mais extensiva por ser a solução preferida. No estudo detalhado deste conversor utiliza-se o modelo de média que foi aprofundado na bibliografia, com a finalidade de serem obtidas funções transferência relevantes para o consequente tratamento do problema.

A simulação de um caso específico em que se utiliza o conversor Cuk serve como base de validação para os resultados obtidos através da análise analítica. Os resultados obtidos na simulação convergem no sentido de facilitar a implementação do mesmo conversor para aplicações em sistemas híbridos de armazenamento de energia.



# Abstract

This document includes some knowledge about energy storage hybrid systems. The problem to solve needs the study of current bidirectional converters and implies the revision of state of art of some topologies. In this section it will be reviewed the Cuk converter, dual half-bridge and dual active bridge.

The Cuk converter was considered the solution for the problem and so it will have an extensive approach. The average model, reviewed in some references, would be the analitic method to study Cuk converter in detail. This model can specify the transfer function related to that converter.

The simulation of a special case in which the Cuk converter is used can afford the validation of analitical results of the applied method. The simulation results can be an initial consideration in the implementation of the Cuk converter on energy storage hybrid systems applications.



# Agradecimentos

Na realização dos trabalhos da Dissertação sinto a necessidade de fazer alguns agradecimentos a algumas pessoas.

Agradeço em primeiro lugar ao meu orientador da dissertação, o professor Rui Esteves Araújo, pela disponibilidade e pela partilha de conhecimento trocada durante este período e mesmo por outras situações como na participação de algumas unidades curriculares. Continuando a linha de pensamento, agradeço ao eng. Cláudio por também me ter auxiliado no trabalho onde também tive a oportunidade de aprender mais um pouco.

Em termos académicos, agradeço à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto porque claramente está acima de muitas e sinto que foi a melhor segunda casa durante estes 5 anos.

Fora do contexto académico, nestes últimos anos passados a estudar para ser engenheiro sei que tive excelentes momentos que ficarão com toda a certeza para a vida. Todos os acontecimentos, os bons para recordar e os maus para aprender, levaram-me a ser quem eu sou hoje. E para isso tudo acontecer estiveram sempre presentes os meus amigos, de vários lugares, seja na Faculdade de Engenharia ou noutro lugar, a quem eu devo tudo e a quem quero agradecer bastante.

Por último, mas não menos importante, quero agradecer à minha família porque se não fosse esta presente, de certeza que não estaria aqui a escrever a dissertação. Muito Obrigado!!!

Gonçalo André Maio Dias





# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Abreviaturas e Símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Enquadramento e Motivação . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	1
1.3 Estrutura da Dissertação . . . . .	2
<b>2 Revisão do Estado da Arte</b>	<b>3</b>
2.1 Conversores CC/CC Isolados e Bidirecionais em Corrente . . . . .	3
2.2 Conversor Cuk . . . . .	4
2.3 Dual Half Bridge . . . . .	6
2.4 Dual Active Bridge (DAB) . . . . .	8
2.5 Escolha do conversor para o projeto . . . . .	9
<b>3 Conversor Cuk</b>	<b>11</b>
3.1 Descrição da Topologia Unidirecional . . . . .	11
3.1.1 Indutores . . . . .	12
3.1.2 Condensadores . . . . .	16
3.1.3 Transformador . . . . .	20
3.1.4 Semicondutores . . . . .	21
3.2 Descrição analítica do Conversor Cuk . . . . .	24
3.2.1 Equações características e Espaço dos Estados no modelo ideal . . . . .	26
3.2.2 Inclusão de elementos parasitas . . . . .	32
3.3 Transição do modelo unidirecional para o bidirecional . . . . .	36
<b>4 Simulação do Modelo do Conversor</b>	<b>39</b>
<b>5 Conclusão</b>	<b>49</b>
5.1 Discussão de Resultados . . . . .	49
5.2 Trabalho Futuro . . . . .	50
<b>6 Referências Bibliográficas</b>	<b>51</b>



# Lista de Figuras

2.1	Bloco de um Conversor CC/CC Bidirecional em Corrente . . . . .	3
2.2	Topologia Cuk com snubbers de tensão de [1] . . . . .	4
2.3	Formas de Onda do conversor Cuk com snubbers de tensão de [1] . . . . .	5
2.4	Conversor Dual Half Bridge da referência [2] . . . . .	7
2.5	Formas de Onda do Dual Half Bridge em [2] . . . . .	8
2.6	Topologia DAB da referência [4] . . . . .	9
3.1	Topologia Cuk Unidirecional Isolada . . . . .	11
3.2	Desenho equivalente de uma bobina real . . . . .	13
3.3	Exemplo da relação existente entre tensão e corrente num indutor . . . . .	14
3.4	Circuito equivalente para o indutor de entrada . . . . .	14
3.5	Circuito equivalente para o indutor de saída . . . . .	16
3.6	Desenho equivalente do condensador real . . . . .	18
3.7	Circuito equivalente para o condensador do primário . . . . .	19
3.8	Circuito equivalente para o condensador do secundário . . . . .	19
3.9	Esquema de um transformador . . . . .	20
3.10	Esquema de Entrada e Saídas de um Conversor Unidirecional . . . . .	22
3.11	Esquema dos semicondutores reais . . . . .	23
3.12	Cuk no estado ON . . . . .	27
3.13	Circuito equivalente do Cuk no estado ON . . . . .	27
3.14	Cuk no estado OFF . . . . .	28
3.15	Circuito equivalente do Cuk no estado OFF . . . . .	28
3.16	Topologia Cuk Bidirecional Isolada . . . . .	37
4.1	Modelo Matemático do Simulink . . . . .	40
4.2	Modelo Matemático do Simulink (Bobinas) . . . . .	41
4.3	Modelo Matemático do Simulink (Condensadores) . . . . .	42
4.4	Modelo Matemático do Simulink (Semicondutores) . . . . .	42
4.5	Conversor Cuk no Simscape . . . . .	43
4.6	Dinâmica da Tensão de Saída com degrau da Fonte (caso ideal e real) . . . . .	43
4.7	Dinâmica da Corrente de Entrada com degrau da Fonte (caso real) . . . . .	43
4.8	Dinâmica da Tensão de Saída com perturbação de 3% do duty-cycle (caso ideal) . . . . .	44
4.9	Dinâmica da Tensão de Saída com perturbação de 3% do duty-cycle (caso real) . . . . .	44
4.10	Dinâmica da Tensão de Saída com perturbação de 10% do duty-cycle (caso real) . . . . .	45
4.11	Dinâmica da Corrente de Entrada com perturbação de 3% do duty-cycle (caso ideal) . . . . .	45
4.12	Dinâmica da Corrente de Entrada com perturbação de 3% do duty-cycle (caso real) . . . . .	46
4.13	Dinâmica da Corrente de Entrada com perturbação de 10% do duty-cycle (caso real) . . . . .	46
4.14	Diagrama de Bode comparativo entre os casos ideal e real do ganho de tensão . . . . .	47

4.15	Gráfico da função do rendimento em função do duty-cycle (caso real) . . . . .	47
4.16	Dinâmica do Rendimento para o caso real com dois duty-cycles diferentes (40% e 30%) . . . . .	48

# Lista de Tabelas

2.1	Comparação de características das topologias revistas . . . . .	9
3.1	Grandezas associadas aos semicondutores durante o funcionamento do conversor	24
3.2	Equações característica do estado ON . . . . .	27
3.3	Equações característica do estado OFF . . . . .	29
3.4	Ganhos em regime permanente no modelo ideal . . . . .	31
3.5	Ganhos em relação à tensão de entrada em regime permanente no modelo real . .	36
3.6	Ganhos em relação à tensão de condução direta no díodo em regime permanente no modelo real . . . . .	37
4.1	Valores utilizados na simulação ideal e real . . . . .	39
4.2	Valores dos componentes parasitas utilizados na simulação real . . . . .	40



# Abreviaturas e Símbolos

$D$	Duty-Cicle Principal
$D'$	Complemento do Duty-Cicle
$\hat{d}$	Duty-Cicle de pequeno sinal
$D_x$	Díodo x
$DAB$	Dual Active Bridge
$DHB$	Dual Half Bridge
$DPS$	Double Phase Shifting
$EPS$	Extended Phase Shifting
$i_{Lx}$	Corrente na Bobina $Lx$
$R_x$	Resistência x
$S_x$	Semicondutor controlado x
$SPS$	Single Phase Shifting
$TPS$	Triple Phase Shifting
$v_D$	Tensão de Condução Direta no Díodo
$v_i$	Tensão de Entrada
$v_o$	Tensão de Saída
$v_{Cx}$	Tensão no Condensador $Cx$
$ZCS$	Zero Current Switching
$ZVS$	Zero Voltage Switching





# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Enquadramento e Motivação

O tema desta dissertação está relacionado com o estudo de alguns conversores electrónicos de potência para utilização em sistemas híbridos de armazenamento de energia. Por sistema híbrido entende-se um sistema em que operam dois ou mais dispositivos de armazenamento distintos. O caso focado neste trabalho é a inserção de elementos de armazenamento de energia tais como baterias e super-condensadores.

A relevância deste tema prende-se com a necessidade de implementação de um conversor bidirecional isolado para aplicações de baixa tensão e elevada corrente, como é de exemplo aplicações relacionadas com veículos eléctricos, onde tipicamente são encontrados baixos níveis de tensão e elevados níveis de corrente.

A bidirecionalidade permite o carregamento/descarregamento dos elementos de armazenamento, o que reduz a necessidade de interação humana, sendo esta apenas necessária para definir o sentido do trânsito de potências através da escolha de certos parâmetros do conversor.

As topologias bidirecionais isoladas permitem o trânsito de correntes em dois sentidos (i.e sentido positivo e negativo), isolando a entrada da saída do conversor galvanicamente, para além de permitir um ganho em tensão elevado. É importante obter eficiência energética nestes conversores, tanto que são usados circuitos secundários que permitem levar os níveis de rendimento acima dos 95%.

### 1.2 Objetivos

Para uma boa solução do problema proposto tem-se em conta a obrigação de que, para além do conversor escolhido desempenhar corretamente a sua função, o mesmo deve realizá-lo com a máxima eficiência possível. Tendo em vista esse requisito principal, é necessário ter como primeiro objetivo do trabalho fazer um estudo sobre o estado da arte no que toca a conversores CC/CC bidirecionais em corrente, de forma a abranger mais possibilidades e melhores probabilidades de obter o requisito.

Após a decisão do conversor a utilizar têm-se como segundo objetivo o estudo teórico e analítico do mesmo. O mesmo estudo pretende prever o comportamento do conversor em pontos de funcionamento diferentes e que auxiliam no estudo da rentabilidade do circuito utilizado.

Os controladores serão uma ajuda para as respostas às entradas do conversor serem o mais rápidas possíveis, preferencialmente respostas com amortecimento crítico sem overshoot associado. Portanto o desenho de um controlador passa por ser mais um objetivo a cumprir no caminho do desenvolvimento de uma solução.

Quando em teoria tudo estiver correto será necessário simular os resultados, em software adequado, de forma a validar os mesmo e ser possível passar para o último objetivo do projeto que será o desenvolvimento de uma plataforma experimental que integre o conversor e o controlador projetados.

### 1.3 Estrutura da Dissertação

O presente documento visa à resolução do problema exposto neste capítulo. A organização do documento está idealizada em quatro capítulos principais cujos objetivos a tratar em cada vão ser expostos nesta secção.

Inicialmente no capítulo 2 é revisto o estado da arte referente ao tema da dissertação, onde são estudados algumas topologias de conversores CC/CC isolados e bidirecionais em corrente. O objetivo desta revisão incorre na percepção das várias possíveis topologias que solucionam o problema proposto e consequentemente na escolha de uma delas. A revisão é realizada tendo em conta várias referências onde constam trabalhos realizados por outros autores cujos temas debatam os mais variados conversores pretendidos.

Com a escolha da topologia a utilizar no trabalho finda-se a revisão do estado da arte e converge-se para o estudo do conversor escolhido, numa primeira fase num plano teórico e por fim a respetiva descrição analítica. Este passo será o capítulo 3 que inclui uma descrição teórica dos elementos utilizados na topologia escolhida e a sua importância e segue com o estudo matemático da dinâmica e regime permanente da mesma.

De forma a validar os resultados obtidos teoricamente o documento apresenta no capítulo 4 simulações de um modelo matemático e de um modelo do circuito do conversor. O objetivo deste capítulo converge para a demonstração de uma situação de funcionamento do conversor simulada e que prove que os resultados obtidos na demonstração converjam com os obtidos através da matemática.

Por fim, a finalizar o documento, no capítulo 5 serão apresentadas as devidas conclusões retiradas deste projeto e todo o trabalho futuro que pode ser feito com o intuito de dar continuidade a este trabalho.

Alguns dados, por impossibilidade de serem colocados normalmente no documento, terão o seu lugar nos anexos do trabalho.

## Capítulo 2

# Revisão do Estado da Arte

### 2.1 Conversores CC/CC Isolados e Bidirecionais em Corrente

Os conversores isolados e bidirecionais em corrente permitem o trânsito de potência nos dois sentidos (tanto no sentido baixa-alta tensão como alta-baixa tensão). Uma vantagem destas topologias em relação às não isoladas passam pela facilidade em introduzir qualquer ganho entre as tensões, facto muito dificultado nas topologias não isoladas por estas apenas influenciarem o ganho de tensões através do duty-cycle dos interruptores. Uma desvantagem é o facto destes conversores ocuparem mais volume e pesarem mais do que topologias não isoladas e unidireccionais dado que é utilizado um transformador e mais interruptores. De seguida, nesta secção, serão apresentadas algumas topologias de forma a comparar outras vantagens/desvantagens entre as mesmas.

Um conversor CC/CC tem como funcionalidade principal alterar a magnitude de grandezas elétricas como tensão e corrente para as mais variadas aplicações.

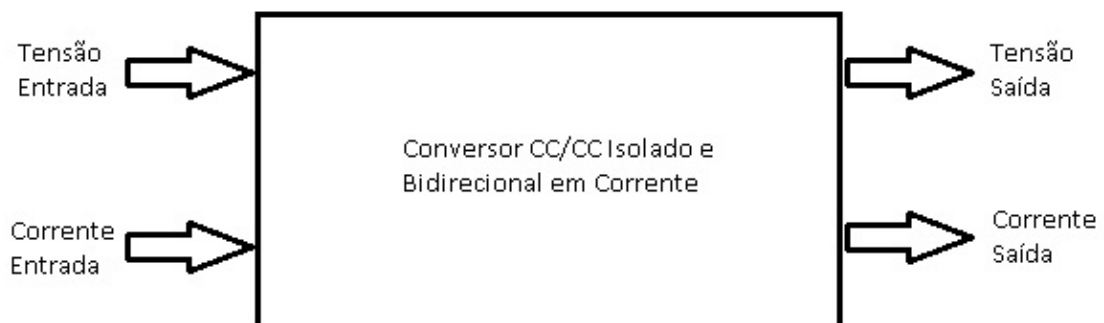


Figura 2.1: Bloco de um Conversor CC/CC Bidirecional em Corrente

As topologias isoladas permitem introduzir uma nova variável à equação do ganho de tensão e corrente dado que a razão de transformação utilizada define o sinal da tensão na malha de saída.

$$\frac{V_o}{V_i} = M(N, D); \quad (2.1)$$

$$\frac{I_o}{I_i} = \frac{1}{M(N, D)} \quad (2.2)$$

## 2.2 Conversor Cuk

O conversor Cuk é uma topologia de conversores CC/CC bidirecionais em corrente isolados passível de ser estudada tendo em conta vários pontos. Esta topologia utiliza dois semicondutores ativos (um na baixa tensão e outro na alta tensão). Em comparação com a topologia unidirecional, ambos os semicondutores (transístor e díodo) são substituídos por semicondutores ativos com díodo em anti-paralelo, com vista à bidirecionalidade.

A utilização de apenas dois semicondutores ativos implica menos complexidade no sistema e um custo menor. Mas como desvantagem, este conversor apresenta hard-switching se não possuir snubbers, dado que nas comutações ocorrem grandes declives de corrente num curto espaço de tempo, sendo por isso uma desvantagem a considerar principalmente quando as correntes do conversor são particularmente altas.

Para este conversor vai ser explicitada a topologia com snubbers incluídos apresentado na referência [1]. Nesta referência, a topologia responde a um problema no âmbito da eletrónica automóvel onde estão presentes tensões baixas e correntes elevadas. As correntes de entrada e de saída do conversor são contínuas não-pulsatórias, o que permite menor interferência eletromagnética por parte do sistema. A figura 2.2 ilustra uma topologia do conversor Cuk bidireccional com um snubber de tensão incluído.

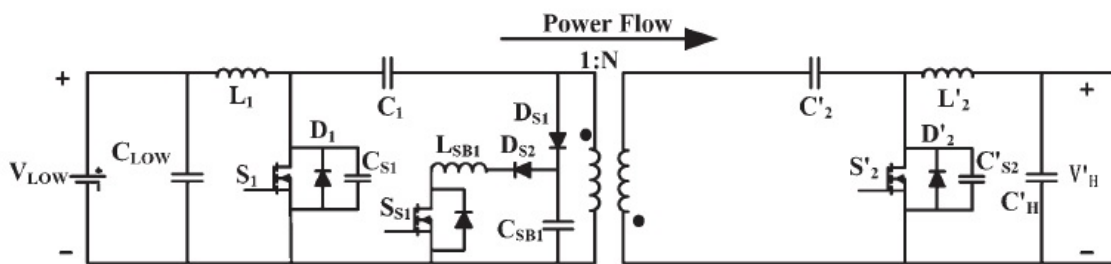


Figura 2.2: Topologia Cuk com snubbers de tensão de [1]

Modo de Funcionamento (da baixa para a alta tensão)

1. Desliga-se o interruptor S1 em ZVS e ocorre ressonância entre L1, L2, CSB1 e C1.
2. Após um dead time, e com a ativação de D2, é possível ligar o S2 em ZVS.
3. Ligando S2, L1 e transformador fornecem corrente ao CSB1 até a última alterar a polaridade. Quando as correntes de L1 e transformador obtêm a mesma intensidade e sentido, DS1 deixa de conduzir.

4. S2 é desligado em ZVS e D2 passa a conduzir, fornecendo a corrente a L1 e L2.
5. Quando DS1 desligou começou uma ressonância entre CS1 e transformador. No momento em que a corrente no CS1 era zero, ligou-se S1 em ZCS. Entretanto ligou-se também o SS1 em ZCS dado que LSB1 assim o permite. Com isto VCSB1 diminui.
6. D2 desliga-se, havendo ressonância entre CS2 e o transformador. A tensão de CSB1 diminui até D1 e DS1 ficarem diretamente polarizados.
7. A ressonância entre o transformador e CS2 continua até ao fim do ciclo de comutação, altura em que se repete o passo 1.

Na figura 2.3 estão representadas formas de onda características no conversor Cuk com circuito secundário em tensão, nomeadamente as correntes e tensões nos semicondutores e correntes nas bobinas. Nos semicondutores ocorre uma certa ressonância nas suas formas de onda, originárias do conjunto indutância-capacitância que é utilizado no Cuk. As correntes na bobina são consideradas constantes dado o mínimo ripple associado.

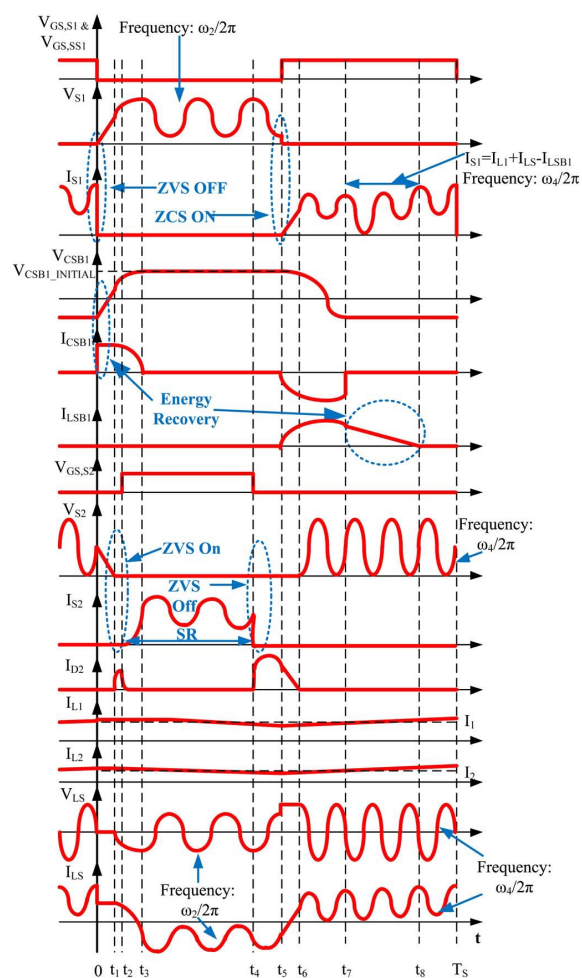


Figura 2.3: Formas de Onda do conversor Cuk com snubbers de tensão de [1]

## 2.3 Dual Half Bridge

O Dual Half Bridge é uma topologia de conversor DC/DC bidirecional e isolado que utiliza duas meias-pontes no seu circuito, mais especificamente uma em cada lado do transformador, totalizando 4 interruptores. O controlo dos semicondutores de pontes diferentes é realizado com desfasamento de fase entre os mesmos. A isto chama-se *phase-shifting*, técnica que permite controlar o sentido do trânsito de potência, tornando esta topologia bidirecional em corrente. Um exemplo de uma configuração Dual Half Bridge é utilizado em [2] e mostrada na figura 2.4.

A base de operação desta topologia consiste no controlo dos semicondutores através do desfasamento de fase entre semicondutores de pontes opostas. Este funcionamento baseia-se no controlo de tensão nos terminais da indutância de fuga do transformador, permitindo assim controlar o sentido do trânsito de potência. Considerando um circuito equivalente visto a partir do primário do transformador, a tensão na indutância de fuga equivale a tensão do primário menos a tensão no secundário do transformador. Ambas provêm da saída das meias-pontes, sendo, portanto, ondas quadradas de amplitude igual à soma de ambas as tensões dos condensadores. O desfasamento de fase entre estas ondas permite a tal alteração de sentido da corrente que lhe passa.

Esta topologia inclui no lado de baixa tensão uma meia-ponte alimentada em corrente (a entrada da mesma é uma corrente contínua) e no lado de alta tensão outra meia-ponte alimentada em tensão (em que a entrada da mesma é a própria alta tensão). O transformador utilizado é de alta frequência, dado que os seus enrolamentos estão sujeitos a formas de onda quadrada de alta frequência (igual à frequência de comutação dos semicondutores). Esta característica obtém uma vantagem em relação a outras topologias de transformadores de frequência baixa através da redução substancial de tamanho do transformador e dos ruídos por ele provocados serem menores aquando de frequências altas.

A consequência de existirem pontes alimentadas em corrente é de que os semicondutores presentes estão sujeitos a correntes não nulas na maioria do tempo de funcionamento, aumentando a possibilidade de ocorrerem perdas nas comutações. Esta topologia baseia-se num circuito auxiliar de ressonância explicado na referência [3] que possibilita comutações em que o semicondutor tem uma diferença de potencial nula nos seus terminais, ocorrendo assim o ZVS e posteriormente perdas nas comutações próximas de zero e aumento do rendimento do conversor. Em resumo, é incluído em cada semicondutor um condensador em paralelo que tem tensão nula enquanto o semicondutor está ligado, permitindo assim o ZVS quando o mesmo transita para desligado. No momento em que ambos os semicondutores estão desligados (um instante em comparação com o tempo total de um ciclo de comutação) as tensões dos dois condensadores é trocada através de ressonância destes com a indutância de fuga de forma a possibilitar o ZVS quando um semicondutor transitar de 0 para 1. Esta técnica simples permite o ZVS sem alterar visivelmente o volume ocupado pelo conversor.

### Modo de Funcionamento

1. Inicialmente o interruptor S1 e o diódo D3 conduzem. A corrente no transformador tem um declive positivo.

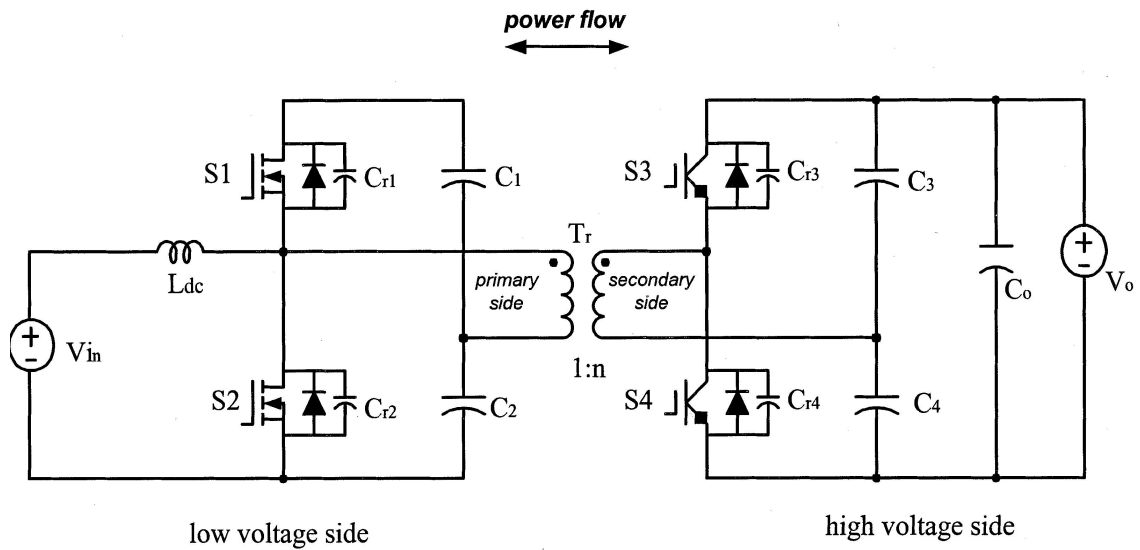


Figura 2.4: Conversor Dual Half Bridge da referência [2]

2. O interruptor S1 é desligado, provocando uma ressonância entre Cr1, Cr2 e o primário do transformador.  $V_{cr2}$  diminui a partir de  $V_1 + V_2$  com um declive negativo cujo módulo é a diferença entre a corrente no primário e a corrente de entrada. Neste passo ocorre o tempo morto entre a comutação de S1 com S2 dado que, quando a tensão de Cr2 igualar o zero, o diodo D2 fica diretamente polarizado, permitindo o ZVS do S2. Quando isto acontece, o Cr1 tem a tensão de  $V_1 + V_2$ .

3. A tensão no primário passa a ter um declive negativo de módulo  $V_2$  aquando do início da condução de D2, logo a sua corrente diminui. Quando a mesma passa a ser menor do que a corrente de entrada, o diodo D2 deixa de conduzir passando o S2 a conduzir.

4. Quando a corrente no transformador igualar zero ocorre a mudança de polaridade na corrente e assim substitui-se D3 por S3.

5. O interruptor S3 é desligado e à semelhança do ponto 2 os condensadores Cr3 e Cr4 entram em ressonância com o secundário do transformador. Quando Cr4 igualar o zero, D4 passa a conduzir permitindo o ZVS do S4.

6. O interruptor S2 é desligado, ocorrendo ressonância entre Cr1, Cr2 e o primário do transformador. Quando  $V_{cr1}$  fica igual a zero, D1 liga e permite o ZVS de S1.

7. A corrente passa de D4 a S4 quando a corrente no transformador muda de polaridade.

8. A corrente passa de D1 a S1 quando a corrente no transformador excede a corrente de entrada.

9. O interruptor S4 é desligado, ocorrendo ressonância entre Cr3, Cr4 e o secundário do transformador. Quando  $V_{cr3}$  igual a zero, D3 passa a conduzir permitindo o ZVS de S3. Depois deste ponto volta-se ao primeiro passo.

Na figura 2.5 são mostradas algumas formas de onda no dual half-bridge resultantes do modo de funcionamento acima descrito. Com algum destaque existe um desfasamento em tensão dos

dois lados do transformador, característica que permite controlar o sentido do trânsito de potências. O caso refletido na mesma figura resulta da técnica de SPS.

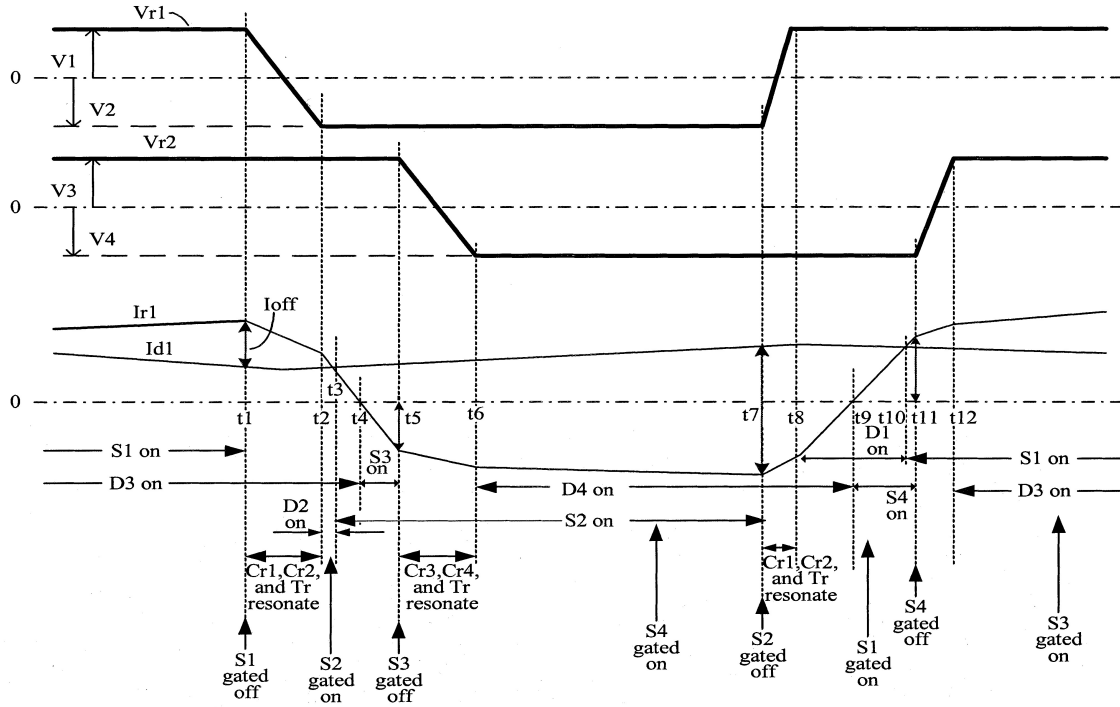


Figura 2.5: Formas de Onda do Dual Half Bridge em [2]

## 2.4 Dual Active Bridge (DAB)

O conversor DAB utiliza duas pontes completas, uma em cada lado do transformador isolante. A topologia descrita nesta secção será a variante de pontes alimentadas em tensão, com um controlo de phase-shifting.

Em semelhança com o conversor DHB, o DAB permite o controlo do trânsito de potência através da criação de duas ondas quadradas desfasadas em fase, mas obtém vantagem sobre o DHB dado que possibilita vários métodos de controlo de phase-shifting (SPS, EPS, DPS, TPS) em relação ao anterior, que apenas engloba o SPS. Estas técnicas de phase-shifting encontram-se detalhadas na referência [4].

Para esta topologia são utilizados 8 interruptores, o que tem como vantagem um maior trânsito de potência em comparação com topologia apresentadas anteriormente em detrimento do custo aumentar. O soft-switching é fácil de ser atingido, exceptuando num caso de carga leve, onde as correntes são elevadas, podendo este ser melhorado com um circuito auxiliar de ressonância no transformador. Existem algumas soluções referenciadas em [4] com vista ao melhoramento do soft-switching, custando um pouco na bidirecionalidade.

Um problema nesta topologia, à semelhança da topologia DHB, passa pela potência reativa na indutância de fuga do transformador. O facto de utilizar a mesma para controlar o sentido



das correntes pode implicar a existência de correntes circulantes, característica que deteoriza os componentes do circuito e reduz gravemente a eficiência do conversor. Os métodos de controlo de phase-shifting mais completos, como o DPS por exemplo, podem reduzir em grande escala este problema, dado que permitem anular a potência na indutância nalguns intervalos de tempo permitindo o zero de tensão na mesma.

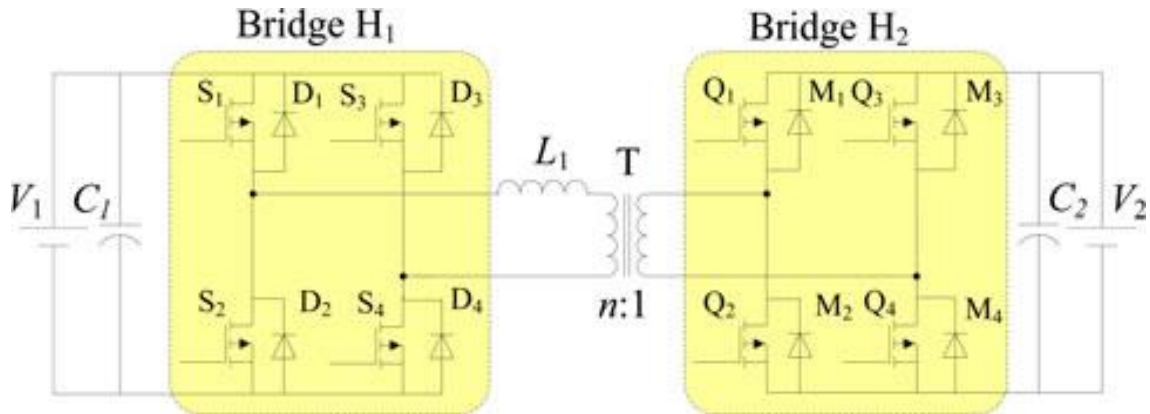


Figura 2.6: Topologia DAB da referência [4]

## 2.5 Escolha do conversor para o projeto

Após uma recolha de informação de forma a aumentar a visão das topologias dos vários conversores CC/CC bidireccionais em corrente é possível retirar conclusões acerca das vantagens e desvantagens de cada um. A seguinte tabela representa os conversores revistos e as suas características comparativamente entre eles.

Pontos	DAB	DHB	Cuk
Soft-Switching Natural	✓	✓	X
Número de Interruptores	8	4	2
Ripple de Corrente	Alto	Alto	Baixo

Tabela 2.1: Comparação de características das topologias revistas

O problema proposto necessita de um conversor bidirecional em corrente que apresente um baixo nível de ripple dado que um dos componentes de armazenamento de energia é uma bateria, o que obriga à sua potência ser aproximadamente constante logo a corrente não deve ter oscilações acentuadas. As topologias de ponte, como revisto neste capítulo, podem apresentar correntes pulsatórias na fonte, o que deterioraria rapidamente a bateria. O Cuk é o único conversor capaz de, para além de evitar correntes pulsatórias, poder controlar o ripple das mesmas para valores aceitáveis.

O conversor escolhido para este trabalho será o conversor Cuk.



## Capítulo 3

# Conversor Cuk

### 3.1 Descrição da Topologia Unidirecional

O conversor Cuk é uma topologia de conversor CC/CC que pode funcionar como abaixador ou elevador de tensão.

A explicação mais detalhada do conversor cuk será apresentada nesta secção, tendo como base a análise ideal do mesmo, ou seja, sem considerar elementos parasitas.

Numa primeira fase será estudado o Cuk unidirecional, em que a carga é resistiva e que a sua ilustração apresenta-se na figura 3.1. Os resultados da análise dessa topologia serão o ponto de partida da transição para o estudo da topologia bidirecional, onde a tensão de saída terá como origem uma fonte de tensão.

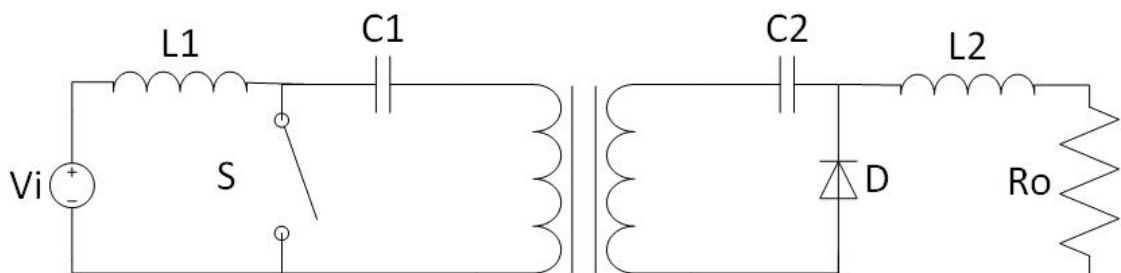


Figura 3.1: Topologia Cuk Unidirecional Isolada

Este conversor assume correntes de entrada e saída com baixo ripple devido à colocação de bobinas em série em ambos os lados do circuito. A utilidade das mesmas permite um controlo teórico das potências em jogo mais simples dado que possibilita assumir que tanto as tensões e correntes de entrada e saída sejam contínuas. Para um conjunto de tensão e corrente contínuas no tempo, a equação da potência instantânea pode ser traduzida na potência em regime permanente num dado ponto de funcionamento, cuja equação é apresentada em 3.1.

$$P(t) = V(t) * I(t) \quad (3.1)$$

As tensões de cada lado do conversor são consideradas constantes inicialmente de forma a facilitar o cálculo das potências, ou seja, assume-se que não sofrem qualquer perturbação. O equivalente não se pode aplicar diretamente às correntes devido a serem grandezas que derivam da dinâmica das bobinas respetivas. Entretanto, em regime permanente, considera-se que o possível ripple existente é extremamente baixo em comparação com o valor médio, o que implica também correntes sensivelmente constantes.

Em regime transitório verifica-se a evolução dos valores de grandezas como tensões e correntes para os seus valores respetivos no regime permanente, como por exemplo as correntes nas bobinas e as tensões nos condensadores utilizados.

### 3.1.1 Indutores

A vantagem essencial do conversor Cuk comparativamente às restantes topologias analisadas no estado da arte debate-se na capacidade de serem obtidas baixas oscilações de corrente tanto na entrada como na saída. A introdução de bobinas em série com os lados do conversor diferencia o conversor dos outros nesta característica.

O indutor ou bobina é um conjunto de enrolamentos de um fio condutor extremamente apertados entre si de forma a ser considerado um elemento electromagnético. Normalmente uma corrente elétrica que atravesse um fio gera um campo magnético ao seu redor. A funcionalidade de uma bobina baseia-se na questão de impôr esse mesmo campo magnético a atravessar o interior dos enrolamentos, podendo assim ser avaliado o fluxo magnético na bobina.

$$v(t) = - \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (3.2)$$

A equação 3.2 reflete a necessidade de existir uma força electromotriz  $v$  que dinamize o fluxo magnético representado pela letra  $\phi$ . A equação é bilateral, o que permite dizer no caso da bobina que, numa situação de tensão nula, o fluxo dentro da mesma não altera e é possível concluir que a bobina tem a capacidade de se auto-induzir, ou seja, manter o próprio campo magnético. A intensidade do campo magnético depende da corrente no fio, como é referenciado na lei de Biot-Savart.

$$\Phi(t) = Li(t) \quad (3.3)$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (3.4)$$

No caso de um indutor essa relação é proporcional de fator  $L$ , que significa a indutância da bobina. A equação linear do campo magnético está representada em 3.3. Através da lei da indução de Lenz, representada em 3.2, e da última equação linear é deduzida a equação base do comportamento de um indutor mostrada em 3.4. Na mesma verifica-se que existe uma relação proporcional entre a variação de corrente circulante nos enrolamentos e a tensão exercida sobre os mesmos. Regressando à situação de tensão nula, comprova-se que a um fluxo magnético constante adequa-se

uma corrente circulante constante, assumindo que as características físicas do indutor não mudam. Com esta assunção, a bobina mostra-se capaz de prevenir picos e oscilações de corrente bruscas.

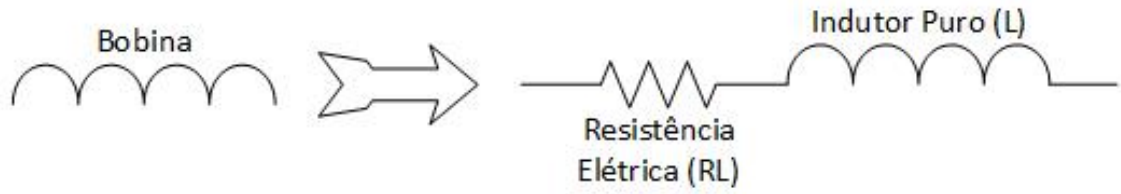


Figura 3.2: Desenho equivalente de uma bobina real

A dinâmica de corrente no indutor é controlada pela tensão aos seus terminais. Em regime transitório numa bobina a sua tensão é não nula de sinal consoante a necessidade de aumentar/diminuir a corrente para atingir o regime permanente, onde a corrente permanece constante e a tensão é nula.

A construção de um indutor tem como base fios condutores, o que introduz uma resistência elétrica em série com o indutor puro. O exemplo dado na figura 3.2 representa uma bobina real, com a resistência parasita incluída.

$$v_{\text{indutor}}(t) = v_{\text{RL}}(t) + v_L(t) \quad (3.5)$$

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = v_{\text{indutor}}(t) - R_L i_L(t) \quad (3.6)$$

Seguindo as equações 3.5 e 3.6 confirma-se a divisão da potência na bobina entre ativa, que corresponde a perdas por efeito Joule na resistência parasita, e reativa, que é a responsável por dinamizar a corrente. Para um conversor CC/CC generalizado, tensões de bobinas não obtêm sempre o mesmo valor para um ciclo de comutação completo, ou seja, a variação de corrente também difere.

$$i_L(t) = I_o e^{-\frac{R_L}{L}t} \quad (3.7)$$

Num exemplo de descarregamento total da bobina com corrente inicial e utilizando a equação 3.6 com tensão nula é obtida a equação 3.7, que demonstra a resposta dada pelo indutor. O funcionamento do conversor deve sempre assumir frequências de comutação grandes de forma a aproximar a exponencial equacionada para um modelo linear em que a corrente varia com declive constante, caso ilustrado na figura 3.3.

Num conversor de potência são utilizados semicondutores que introduzem vários modos de operação num ciclo, que implica igualmente várias tensões aplicadas à bobina.

$$\sum_{i=1}^M \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i(t) dt \right) = i_L(T) - i_L(0) \quad (3.8)$$

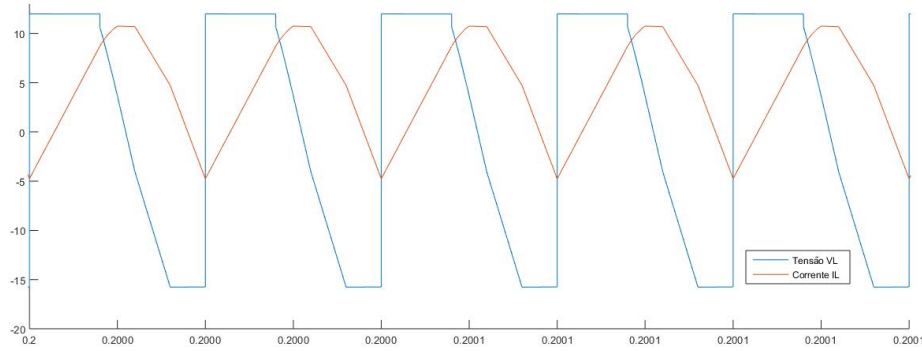


Figura 3.3: Exemplo da relação existente entre tensão e corrente num indutor

A equação 3.8 modela a variação da corrente no indutor e tem como base de tempo o período  $T$  de um ciclo de comutação.  $i_L(T) - i_L(0)$  transmite a variação de corrente num ciclo de comutação completo.  $M$  representa o número de modos possíveis no conversor e a área do gráfico da tensão da bobina dividida pela indutância demonstra qual a magnitude da variação da corrente no ciclo.

Em regime transitório esta área é diferente de zero, obrigando a variar a corrente de forma a mesma tender para um certo valor final e onde atinge o regime permanente. Nesse regime a tensão média na bobina num ciclo inteiro é zero.

No conversor proposto para a solução do problema são colocadas duas bobinas, uma em cada lado do circuito. A bobina de entrada permite uma corrente praticamente constante na fonte de tensão utilizada. Este indutor, estando em série com a fonte, tem o terminal positivo com potencial semelhante ao da fonte, ou seja, será sempre constante em termos nominais. Esta conclusão auxilia o cálculo da tensão na bobina dado que apenas o terminal negativo terá potencial variado consoante o modo de operação dado que o mesmo estará conectado à source do semiconductor controlado.

$$\frac{di_{L1}(t)}{dt} = \frac{V_i - v_S(t)}{L_1} \quad (3.9)$$

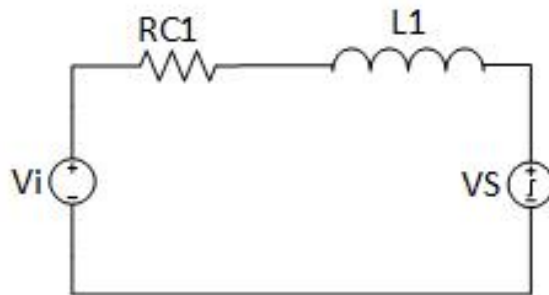


Figura 3.4: Circuito equivalente para o indutor de entrada

$$\frac{di_{L1}(t)}{dt} = \frac{V_i - v_S(t) - R_{L1}i_{L1}(t)}{L_1} \quad (3.10)$$

A partir da equação 3.9, onde  $V_i$  é a tensão da fonte e  $v_S(t)$  a tensão nos terminais do semiconductor controlado, observa-se que a tensão no semiconductor é a única parcela da equação que possibilita a variação da dinâmica da corrente. No caso de uma bobina real, a equação correspondente é a 3.10, onde é incluída a perda de tensão na resistência dos enrolamentos.

$$\int_0^T (V_i - v_S(t) - R_{L1} i_{L1}(t)) dt = i_{L1}(T) - i_{L1}(0) \quad (3.11)$$

$$\int_0^T v_S(t) dt = (V_i - R_{L1} I_{L1}) T \quad (3.12)$$

Aplicando a equação 3.8 ao caso da bobina de entrada obtém-se 3.11. Em regime transitório, a tensão de entrada é diferente da diferença de potencial média do semiconductor dado que se pretende atingir um valor final. No regime permanente é obrigatório acontecer a igualdade verificada em 3.12, dado que a tensão média na bobina deve ser nula para a corrente média ser constante. Na mesma equação é considerada como constante a corrente de entrada dentro de um ciclo de comutação, com o intuito de facilitar cálculos posteriores.

Através da equação 3.11 em regime permanente conclui-se que a variação da corrente na bobina tem um sentido quando o semiconductor está ligado e tem o contrário quando está desligado. A equação 3.13 reflete a troca de sinal da derivada da corrente da bobina de entrada quando ocorre uma troca de modo de operação.

$$\int_0^{DT} (V_i - v_S(t) - R_{L1} i_{L1}(t)) dt = - \int_{DT}^T (V_i - v_S(t) - R_{L1} i_{L1}(t)) dt \quad (3.13)$$

A consideração da variação da corrente em apenas um dos modos possibilita o cálculo do ripple existente nesta grandeza. Como é demonstrado na equação 3.13, a escolha do modo é livre dado que ambas as variações são de igual valor absoluto, sendo escolhido o modo que facilite os cálculos do ripple. Um exemplo para o caso da bobina de entrada representa-se em 3.14.

$$\delta i_{L1} = \left| \int_0^{DT} (V_i - v_S(t) - R_{L1} i_{L1}(t)) dt \right| \quad (3.14)$$

No lado da saída do conversor é colocada outra bobina. Semelhante ao caso da bobina  $L1$ , este segundo indutor está em série com a saída, que na topologia unidireccional é uma carga resistiva. O terminal negativo da bobina terá sempre o mesmo potencial da saída. A diferença de potencial nesta bobina define-se através do seu terminal positivo que conectado ao diodo mas, contrariamente ao indutor de entrada, ambos os terminais em regime transitório variam de potência e só em regime permanente é que a tensão de saída se torna constante.

$$\frac{di_{L2}(t)}{dt} = \frac{v_D(t) - v_o(t)}{L_2} \quad (3.15)$$

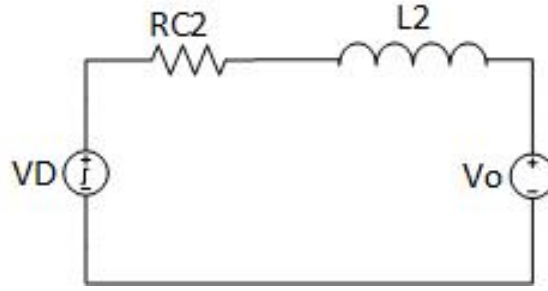


Figura 3.5: Circuito equivalente para o indutor de saída

$$\frac{di_{L2}(t)}{dt} = \frac{v_D(t) - v_o(t) - R_{L2}i_{L2}(t)}{L_2} \quad (3.16)$$

A equação 3.15 representa a dinâmica da corrente se a bobina de saída fosse ideal, onde  $v_o(t)$  é a tensão na carga e  $v_D(t)$  a tensão nos terminais do díodo. No caso de uma bobina real, a equação correspondente é a 3.16, onde é incluída a perda de tensão na resistência dos enrolamentos.

$$\int_0^T (v_D(t) - v_o(t) - R_{L2}i_{L2}(t))dt = i_{L2}(T) - i_{L2}(0) \quad (3.17)$$

$$\int_0^T v_D(t)dt = (V_o + R_{L2}I_{L2})T \quad (3.18)$$

Aplicando a equação 3.8 ao caso da bobina de saída obtém-se 3.17. Em regime transitório, a tensão de saída é diferente da diferença de potencial média do díodo dado que se pretende atingir um valor final. No regime permanente é obrigatório acontecer a igualdade verificada em 3.18, dado que a tensão média na bobina deve ser nula para a corrente média ser constante. Para este caso tanto a tensão na carga e a corrente de saída são considerados constantes num ciclo de comutação para facilitar cálculos posteriores.

De forma semelhante à bobina de entrada ocorre ripple na corrente circulante no indutor de saída. O cálculo do mesmo pode ser realizado considerando o total de variação de corrente num dos modos de operação, sempre o que facilitar cálculos. A equação 3.19 apresenta um possível cálculo do ripple da corrente de saída.

$$\delta i_{L2} = \left| \int_{DT}^T (v_D(t) - v_o(t) - R_{L2}i_{L2}(t))dt \right| \quad (3.19)$$

### 3.1.2 Condensadores

O condensador consiste em duas placas condutoras dispostas paralelamente e separadas por um meio dielétrico, cuja função é de isolar as cargas de ambos os lados, com a finalidade de manter a energia eletrostática. As cargas promovem a criação de campo elétrico que por sua vez



cria uma diferença de potencial entre as placas do condensador. O meio dielétrico é de resistência elétrica elevada, o que não permite a passagem de corrente entre as placas. As equações 3.20 e 3.21 traduzem a relação entre tensão e campo elétrico num caso simplificado, onde a distância entre as placas influencia.

$$v_C(t) = - \int_0^d E dl \quad (3.20)$$

$$v_C(t) = |E|d \quad (3.21)$$

Através da lei de Gauss descrita em 3.22 relaciona-se o campo elétrico com a carga disposta numa das placas, a área  $A$  da placa e a permissividade  $\epsilon$  do meio dielétrico representado em 3.23.

$$\int E \cdot dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon} \quad (3.22)$$

$$|E| = \frac{Q}{\epsilon A} \quad (3.23)$$

Esta equação foi deduzida para um condensador de placas planas por ser mais simples o cálculo. A capacidade  $C$  do condensador é, como a indutância de uma bobina, dependente apenas das características físicas como o meio dielétrico utilizado entre as placas, a área das placas e a distância entre as mesmas. Usando estas propriedades, é possível descrever uma relação linear entre a diferença de potencial nas placas e a sua carga.

$$Q_C = C \Delta v_C \quad (3.24)$$

Existe uma relação linear entre a carga e a tensão num condensador representada na equação 3.24, onde  $Q_C$  é a carga,  $C$  é a capacidade do condensador e  $\Delta V_C$  é a diferença de potencial. Num caso de carga constante, a tensão do condensador é constante e, no caso contrário, a tensão varia proporcionalmente com fator  $\frac{1}{Q}$  à variação de carga.

A dinâmica de carga é diferente de zero quando são injectados ou retirados eletrões, sendo esse facto apenas possível com a introdução de corrente elétrica no condensador, como é demonstrado na equação 3.25. Por sua vez em 3.26 é substituído o  $Q$  pela sua relação linear com  $v_C(t)$ , podendo-se concluir que a capacidade de um condensador também relaciona a variação de tensão com a corrente.

$$I_C = \frac{dQ_C(t)}{dt} \quad (3.25)$$

$$I_C = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (3.26)$$

Entre as placas o meio deve ser um isolador perfeito, o que nunca acontece num caso real onde existe alguma troca de cargas entre os lados. Esse facto permite concluir que o condensador possui

resistência série não nula e que ocorre gasto de potência ativa, como no caso indutivo. A figura 3.6 representa um esquema de um condensador real, onde a tensão do mesmo varia com a queda de tensão na resistência.



Figura 3.6: Desenho equivalente do condensador real

$$v_{\text{condensador}}(t) = R_c i_c(t) + \frac{1}{C} \int i_c(t) dt \quad (3.27)$$

A tensão no condensador real depende de uma parcela linear com a corrente atual e de outra dependente do sinal completo de corrente, como demonstrado em 3.27. Semelhante ao caso da bobina, um condensador é descrito por expressões exponenciais numa situação de variação da sua tensão. No caso de obrigar a diferença de potencial a variar desde uma tensão inicial, a equação ilustrativa desse acontecimento passa por 3.28.

$$v_C(t) = V_f - (V_f - V_i) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.28)$$

Numa situação em que o período do ciclo de comutação é muito reduzido, a exponencial pode ser reduzida a um modelo linear, como em bobinas.

No conversor proposto são colocados dois condensadores, um em cada lado do transformador. A funcionalidade destes condensadores no circuito consiste em bloquear em termos médios a tensão para o transformador. Caso não fossem incluídos o transformador não recebia potência dado que pelo menos um dos lados do mesmo em qualquer instante do ciclo de comutação teria tensão nula, obrigando o outro lado a ter potência igualmente nula. Para esse acontecimento a dinâmica das bobinas seria sempre crescente, ou seja, sem condensadores o sistema seria instável.

Cada condensador está em série com um dos lados do transformador, podendo-se concluir que a sua corrente circulante será sempre igual à corrente no transformador. Como ambas as correntes são proporcionais entre si, como será explicado na parte do transformador, o primário com corrente  $i_1(t)$  insere corrente no secundário  $i_2(t) = \frac{1}{N} i_1(t)$  e vice-versa, ou seja, a corrente no primário será sempre  $N$  vezes maior do que a do secundário.

$$\frac{dv_{C1}(t)}{dt} = \frac{i_1(t)}{C_1} \quad (3.29)$$

$$\frac{dv_{C2}(t)}{dt} = \frac{i_2(t)}{C_2} \quad (3.30)$$

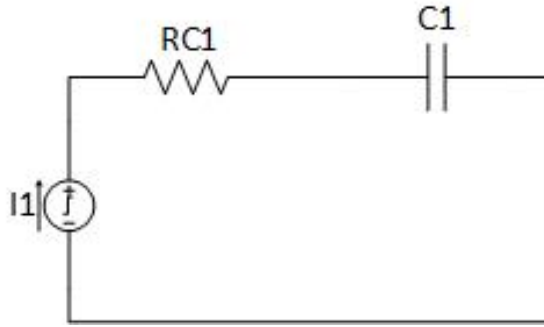


Figura 3.7: Circuito equivalente para o condensador do primário

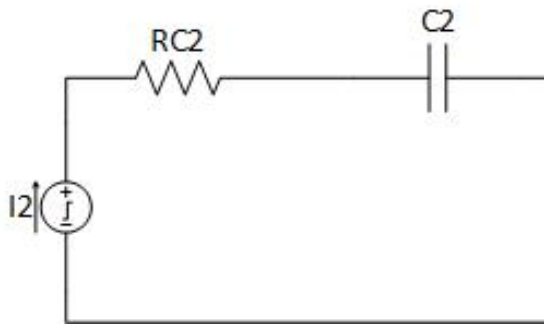


Figura 3.8: Circuito equivalente para o condensador do secundário

As equações 3.29 e 3.30 refletem a variação das tensões dos condensadores 1 e 2 respetivamente tendo em conta as correntes nos transformadores e as capacidades dos mesmos, sendo que as figuras 3.7 e 3.8 demonstram os circuitos equivalentes possíveis para os condensadores.

A questão da resistência parasita não influenciará a dinâmica de tensão do condensador puro, como já foi explicado através da equação em 3.27, mas introduz uma queda de tensão não desejável e que representará uma parte das perdas do conversor.

$$\int_0^T i_1(t) dt = v_{C1}(T) - v_{C1}(0) \quad (3.31)$$

$$\int_0^T i_1(t) dt = 0 \quad (3.32)$$

A equação 3.31 corresponde ao dual de 3.8, neste caso para as correntes nos condensadores, onde é possível aplicar-se para ambos os condensadores dado que as suas correntes são proporcionais. Em regime transitório o integral da corrente num ciclo é diferente de zero e de sinal correspondente à necessidade de variação da tensão. O regime permanente é atingido quando existe um equilíbrio na área do gráfico da corrente, ou seja, a variação de carga ser nula num ciclo inteiro.

Em regime permanente, em valores médios, a tensão dos condensadores é constante, considerando como base temporal o período de um ciclo do conversor. Na consideração de um ciclo verifica-se que num dos modos de operação a corrente tem um sentido e no outro obrigatoriamente o sentido altera-se, possibilitando o equilíbrio dinâmica da grandeza. A prova deste facto acontece em 3.33, caso em que as áreas dos integrais devem ser de sinais contrários.

$$\int_0^{DT} i_C(t) dt = - \int_{DT}^T i_C(t) dt \quad (3.33)$$

### 3.1.3 Transformador

Na topologia isolada utiliza-se um transformador com o intuito de separar galvanicamente a entrada da saída. O facto do isolamento galvânico permite mais um grau de liberdade na análise do conversor dado que é possível dimensionar uma razão de transformação  $N$  livre.

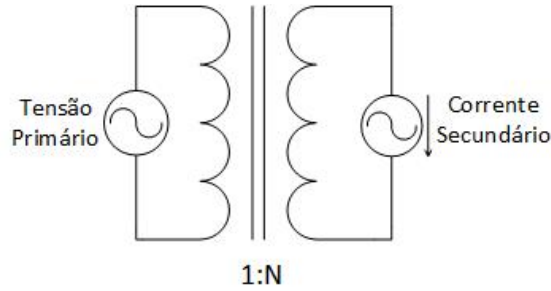


Figura 3.9: Esquema de um transformador

Sendo o transformador o conjunto de dois ou mais bobinas que mutuamente se induzem seguindo a lei da indução registada na equação 3.2 multiplicada pelo  $N$ . Numa indução mútua, se numa das bobinas com  $N_1$  enrolamentos ocorrer uma diferença de potencial de  $V_1$  a segunda bobina de  $N_2$  será sujeita a uma tensão de  $\frac{N_2}{N_1} V_1$ .

$$N = \frac{N_2}{N_1} \quad (3.34)$$

Em termos de corrente, a indutância da bobina depende do quadrado de  $N$ , o que implica a corrente  $I_1$  ser igual a  $\frac{N_1}{N_2} I_1$ . O fundamento desta afirmação tem como base a equação reflu.

$$L = KN^2 \quad (3.35)$$

Para estas relações de grandezas elétricas entre os lados do transformador são cumpridos os requisitos da lei da conservação da energia dado que, por exemplo, se tendo como referência o primário do transformador o seu secundário tem tensão proporcional em  $N$  mas corrente inversamente proporcional no mesmo  $N$ , logo a potência do secundário é igual à do primário.

No caso da figura 3.9, a tensão no secundário será  $N$  vezes maior do que no primário, dado que o secundário tem uma proporção de  $N$  enrolamentos para 1 enrolamento do primário, como

indicado na parte inferior dessa figura. Por outro lado a corrente no primário será igualmente  $N$  vezes maior do que a do secundário.

O ponto de partida para analisar o comportamento do transformador reside no facto de existirem relações lineares do mesmo factor entre o primário e secundário, sendo apenas necessário conhecer o sinal completo num ciclo de um dos lados para análise deste componente ser válida.

$$\int_0^T v_1(t)dt = 0 \quad (3.36)$$

No regime permanente as potências reativas são nulas se for considerado como base de tempo o período de um ciclo de comutação. O transformador ideal possui apenas parte reativa, ou seja, terá de ser nula. Para isso, sendo um conjunto de bobinas, é simples analisar a sua tensão aos terminais de um dos lados. A equação 3.36 avalia a área da tensão do primário num ciclo completo e pode ser mais uma equação característica de análise do conversor Cuk.

O transformador possui alguns elementos parasitas, como resistência elétrica nos seus enrolamentos, indutância de fuga, ou seja, nem todo o campo magnético gerado por corrente de um dos lados do transformador é contabilizado no fluxo magnético do outro lado e impedância de magnetização. Dada o grande conjunto de parasitas já considerados e o facto do transformador apresentar parasitas não óhmicos, os mesmos não serão contabilizados neste trabalho, assumindo-se desde já que o transformador utilizado é ideal.

### 3.1.4 Semicondutores

A conversão das grandezas elétricas numa topologia CC/CC requer a utilização de alguns semicondutores de potência. No caso do Cuk unidirecional é usado um semiconductor controlado, desde um transistor, MOSFET ou IGBT no lado primário do transformador e um díodo no secundário.

A introdução de tais elementos insere uma variável de controlo chamada duty-cycle, doravante designada pela sigla  $D$ , que reflete, num ciclo do conversor, uma proporção entre o tempo de condução do semiconductor e o período do ciclo, como demonstrado na equação 3.37. Uma ilustração desta afirmação apresenta-se em 3.10.

O switch tem um terminal gate que permite definir o modo de funcionamento do mesmo. Na gate é enviado um sinal em tensão contínua de valor superior à tensão mínima (threshold) de forma a ligar o componente ou inferior para o desligar. O controlo deste semiconductor é feito através da modulação de largura de impulso (PWM), técnica que consiste em enviar uma onda retangular de frequência constante cuja proporção entre o tempo de tensão não-nula num período do sinal e o período total definem o  $D$ .

$$D = \frac{T_{ON}}{T_{ciclo}} \quad (3.37)$$



Figura 3.10: Esquema de Entrada e Saídas de um Conversor Unidirecional

Por outro lado também é possível determinar o valor complementar do duty-cycle, que será pela lógica a proporção entre o tempo em que o switch está desligado e o período do ciclo, igualdade mostrada em 3.38.

$$D' = \frac{T_{\text{OFF}}}{T_{\text{ciclo}}} \quad (3.38)$$

Para o caso do Cuk a soma de ambas as proporções deve ser de 1, dado que a soma dos tempos ON e OFF é igual ao período do ciclo.

O díodo é um semiconductor não controlado devido ao facto de, ao contrário do switch, não possui gate de controlo. A condição necessária ao bloqueio ou condução do díodo se restringe apenas à tensão a que o mesmo está sujeito. Numa situação de polarização direta, ou seja, a queda de tensão verificada no díodo é no sentido do mesmo, o díodo conduz.

Os elementos parasitas de ambos os semicondutores apenas são valorizados na situação em que estão ligados. Numa situação ideal, a condução nestes não provoca queda de tensão nem perdas, dado que ambos funcionam como perfeitos condutores. Na realidade ambos possuem uma resistência elétrica de condução e o díodo apraz também uma tensão de condução direta. Um esquema dos semicondutores reais é ilustrado em 3.11, onde o switch encontra-se na parte superior e o díodo na inferior.

A análise das grandezas associadas aos semicondutores deve ser avaliada separadamente dos outros componentes por facilitar cálculos. Numa situação ideal e começando no switch, no período do ciclo de trabalho do semiconductor controlado, a queda de tensão associada será nula e a sua corrente terá a soma da corrente da bobina de entrada e a de saída multiplicada pela razão de transformação  $N$ . No caso complementar, a tensão equivalerá ao somatório da tensão do condensador primário com a tensão no primário. A corrente porém é nula por não existir condução no switch. As seguintes funções por ramos representam a tensão e corrente no switch, pela ordem

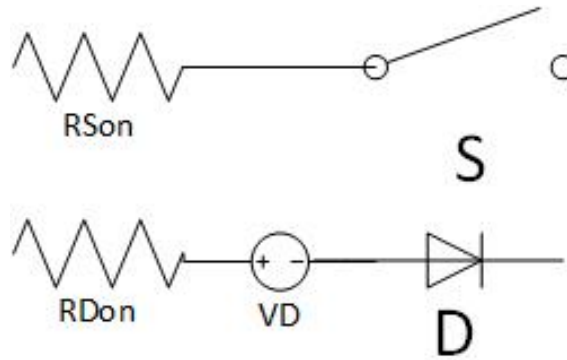


Figura 3.11: Esquema dos semicondutores reais

respetiva.

$$v_S(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < DT \\ v_{C1}(t) + v_1(t) & DT \leq t < T \end{cases} \quad (3.39)$$

$$i_S(t) = \begin{cases} i_{L1} + Ni_{L2} & 0 \leq t < DT \\ 0 & DT \leq t < T \end{cases} \quad (3.40)$$

Nas mesmas condições, o díodo está bloqueado quando o switch está ligado devido a ser inversamente polarizado e, por conseguinte, ficar bloqueado. Neste período de tempo, a corrente circulante no mesmo é nula e a tensão igual a tensão no primário menos a tensão no condensador secundário. A comutação do switch possibilita a ligação do díodo e assim a tensão no mesmo passa a ser nula e a corrente é igual à que passava no switch dividida pelo factor  $N$ . Isto deve-se ao facto de o díodo estar do lado do transformador com mais enrolamentos, o que condiciona a corrente a ser menor pelo mesma razão de transformação. As seguintes funções por ramos representam a tensão e corrente no díodo, pela ordem respetiva.

$$v_D(t) = \begin{cases} v_2(t) - v_{C2}(t) & 0 \leq t < DT \\ 0 & DT \leq t < T \end{cases} \quad (3.41)$$

$$i_D(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < DT \\ \frac{i_{L1}}{N} + i_{L2} & DT \leq t < T \end{cases} \quad (3.42)$$

Na inclusão dos elementos parasitas destes componentes, apenas os respetivos estados de condução são afetados para o representado em 3.43 e 3.44.

$$v_{Son}(t) = R_{Son}(i_{L1}(t) + Ni_{L2}(t)) \quad (3.43)$$

$$v_{\text{Don}}(t) = -V_D - R_{\text{Don}} \left( i_{L2}(t) + \frac{i_{L1}(t)}{N} \right) \quad (3.44)$$

Componentes Eletrônicos	Característica	Valor
Semicondutor Controlado	Tensão Média	$V_i$
Semicondutor Controlado	Tensão Máxima	$\frac{V_i}{D}$
Semicondutor Controlado	Corrente Média	$D(i_{L1} + Ni_{L2})$
Semicondutor Controlado	Corrente Máxima	$i_{L1} + Ni_{L2}$
Díodo	Tensão Média	$V_o$
Díodo	Tensão Máxima	$\frac{V_o}{D}$
Díodo	Corrente Média	$D'(\frac{i_{L1}}{N} + i_{L2})$
Díodo	Corrente Máxima	$\frac{i_{L1}}{N} + i_{L2}$

Tabela 3.1: Grandezas associadas aos semicondutores durante o funcionamento do conversor

### 3.2 Descrição analítica do Conversor Cuk

Em regime permanente as várias grandezas do circuito serão praticamente constantes dada a natureza do tipo de conversor. Os componentes elétricos utilizados no circuito introduzem na descrição analítica equações diferenciais, como foi analisado na descrição teórica e exige um grau de dificuldade maior quando são considerados ripples nas grandezas.

Com o objetivo de ultrapassar essa dificuldade dá-se preferência ao modelo de média estudado através da referência [5]. Este modelo será utilizado nesta fase inicial do cálculo das equações características, dado que é amplamente utilizado nos documentos referenciados, assumindo que as grandezas são constantes.

O modelo de média prende-se na construção de espaços dos estados para cada modo de funcionamento disponível no conversor. Para o caso do Cuk apenas existem dois modos diferentes que são dependentes do estado de condução dos semicondutores.

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (3.45)$$

Em resumo, o espaço dos estados descreve uma relação da variação das consideradas variáveis de estado de um dado sistema com os valores das mesmas e com as de entrada. A equação 3.45 demonstra o espaço dos estados onde  $\mathbf{X}$  é a matriz coluna representativa das variáveis de estado,  $\mathbf{U}$  a matriz coluna das entradas e  $\mathbf{K}$  corresponde às proporções existentes no cálculo da dinâmica das variáveis de estado. O ganho de  $\dot{\mathbf{X}}$  com cada uma das parcelas é constante dado que as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são coeficientes que derivam de características constantes num dado ponto de funcionamento do sistema.

Para o caso de um conversor elétrico, as variáveis de estado serão as correntes nas bobinas e as tensões nos condensadores, dada a facilidade de equacionar as suas dinâmicas, como demonstrado no sub-capítulo anterior. A matriz  $\mathbf{U}$  será preenchido com os valores impostos no conversor como



a tensão de entrada e será considerado num cenário real a tensão de condução direta no díodo, com o intuito de aproximar o circuito teórico à realidade. Na matriz  $\mathbf{K}$  serão utilizados os valores das indutâncias e capacidades dado que nas equações das dinâmicas das variáveis de estado, as mesmas indicam uma proporção. Neste modelo ocorre um caso especial de se considerar a tensão de saída como um estado dada a necessidade de se conhecer o seu sinal e de ser possível equacioná-la através de uma equação diferencial, como os outros estados. As matrizes indicadas a seguir demonstram a disposição destas grandezas.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \\ v_o \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} v_i \\ v_D \end{bmatrix}$$

A equação 3.45 apresenta o modelo geral do espaço dos estados mas a sua solução é descoberta recorrendo à transformada de Laplace. Nessa transformada, a derivada temporal de qualquer variável apresenta-se no domínio das frequências como uma multiplicação com  $s$  e são consideradas as condições iniciais da variável. Para o caso da matriz  $\dot{\mathbf{X}}$ , o seu dual encontra-se na forma  $s\mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ , em que  $\mathbf{X}_0$  é a matriz das condições iniciais e  $s$  o indicativo da frequência. Neste trabalho as condições iniciais serão sempre nulas, o que simplifica o modelo para a forma apresentada em 3.46.

$$\mathbf{X} = [\mathbf{KS} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{BU} \quad (3.46)$$

Para cada modo de operação associam-se matrizes dos coeficientes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  distintas, consoante as equações características do modo. Utilizando as equações revistas na descrição da topologia é possível recriar as matrizes de cada modo e depois fusionar as várias matrizes de modos, dando a cada uma a proporção de tempo em que cada modo está presente. Para o caso de apenas existirem dois modos, como é o caso do conversor Cuk, as equações da descoberta de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  globais são descritas em 3.47 e 3.48.

$$\mathbf{A} = D\mathbf{A}_D + D'\mathbf{A}_D' \quad (3.47)$$

$$\mathbf{B} = D\mathbf{B}_D + D'\mathbf{B}_D' \quad (3.48)$$

O espaço dos estados, da maneira representada, apresenta a solução para se definir os valores de média dos estados em todo o tempo, assumindo-se que as incógnitas se mantêm constantes e que as variáveis atingem o seu regime permanente se não for alterada nenhuma entrada. Os sinais decorrentes deste método são os sinais principais.

O funcionamento do conversor não será igual para todo o tempo devido a alguma necessidade

de alteração de entradas ou saídas por parte do sistema e por isso ocorre a noção de pequenos sinais. Pequenos sinais servem para entender a influência que pequenas alterações ao nível das entradas podem ter nas variáveis de estado. Na dedução da equação dos pequenos sinais, primeiro será assumido que apenas as entradas e os estados terão pequenas alterações, como é possível representar em 3.49.

$$\mathbf{K}(\dot{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}(\mathbf{X} + \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}(U + \hat{u}) \quad (3.49)$$

O duty-cycle do semiconductor é igualmente uma entrada do conversor, dado que é uma escolha como a tensão de entrada, por exemplo. Sendo assim também é uma variável passível de sofrer pequenas perturbações. A sua influência de pequeno sinal no espaço dos estados pode inicialmente ser representado pela variação que provoca nas matrizes dos coeficientes demonstrado em 3.50 e 3.51.

$$\mathbf{A} = (D + \hat{d})\mathbf{A}_D + (D' - \hat{d})\mathbf{A}_{D'} \Leftrightarrow \mathbf{A} = D\mathbf{A}_D + D'\mathbf{A}_{D'} + (\mathbf{A}_D - \mathbf{A}_{D'})\hat{d} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{B} = (D + \hat{d})\mathbf{B}_D + (D' - \hat{d})\mathbf{B}_{D'} \Leftrightarrow \mathbf{B} = D\mathbf{B}_D + D'\mathbf{B}_{D'} + (\mathbf{B}_D - \mathbf{B}_{D'})\hat{d} \quad (3.51)$$

O sinal contínuo ou sinal principal está representado na equação 3.45 e não sofre nenhuma alteração com as pequenas perturbações. O pequeno sinal inicia-se com as parcelas de primeira ordem, ou seja, aquelas que são influenciadas por apenas uma perturbação de uma variável. A equação final dos sinais de primeira ordem é expressa em 3.52.

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\hat{u} + ((\mathbf{A}_D - \mathbf{A}_{D'})\mathbf{X} + (\mathbf{B}_D - \mathbf{B}_{D'})\mathbf{U})\hat{d} \quad (3.52)$$

Algumas perturbações, como as equações iniciais 3.49, 3.50 e 3.51 indicam, podem ser multiplicadas uma por outra. Esse facto origina uma segunda ordem na equação dos pequenos sinais, representada por 3.53.

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_D - \mathbf{A}_{D'})\hat{\mathbf{x}}\hat{d} + (\mathbf{B}_D - \mathbf{B}_{D'})\hat{u}\hat{d} \quad (3.53)$$

As perturbações de segunda ordem são consideradas muito inferiores aos valores nominais das variáveis, o que implica que a magnitude desses sinais seja muito reduzida e que possibilita a eliminação desta ordem na equação do sinal principal e pequeno sinal. Este passo simplifica a equação final do espaço dos estados.

### 3.2.1 Equações características e Espaço dos Estados no modelo ideal

Com a explicitação do espaço dos estados utilizado na análise deste conversor serão agora deduzidas as matrizes dos coeficientes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  de forma a serem descobertas as funções transferências dos estados em relação às entradas.

Em foco estarão os dois modos de operação, doravante designados por estado ON e OFF, devido ao facto de o estado de condução do semiconductor ser o único acontecimento a definir o modo de operação.

### 3.2.1.1 Estado ON

No estado ON o semiconductor está ligado. A ligação do mesmo origina uma polarização inversa no díodo, o que implica o bloqueio do mesmo. Fecha-se uma malha no primário do transformador, que por sua define a tensão no mesmo lado. A malha única no secundário define a corrente nesse lado do transformador, cuja intensidade é igual à da bobina  $L2$ . Em esquema é ilustrado na figura 3.12 a disposição dos componentes do circuito e seus elementos parasitas quando o semiconductor controlado está ligado.

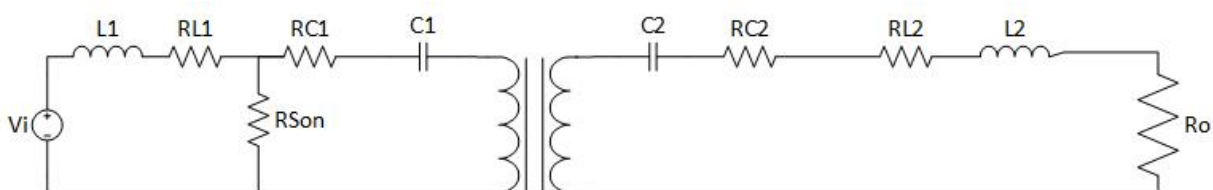


Figura 3.12: Cuk no estado ON

Na figura 3.13 é representado um circuito equivalente para este modo de operação, onde são considerados as grandezas induzidas no transformador e separados os lados do mesmo. Este esquema simplificará a construção do sistema de equações características no estado ON, cujas equações estão representadas na tabela 3.2, e auxiliará a criação das matrizes  $A_D$  e  $B_D$ .

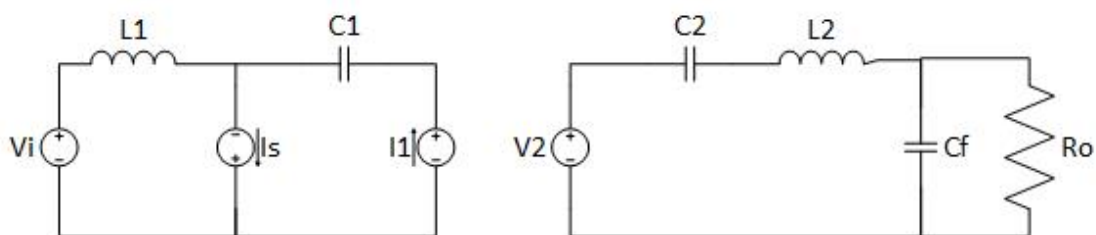


Figura 3.13: Circuito equivalente do Cuk no estado ON

Dinâmica a equacionar	Equações base	Expressão
$L_1 \frac{di_{L1}(t)}{dt}$	3.9 ; 3.39	$v_i$
$L_2 \frac{di_{L2}(t)}{dt}$	3.15 ; 3.41	$-Nv_{C1}(t) - v_{C2}(t) - V_o(t)$
$C_1 \frac{dv_{C1}(t)}{dt}$	3.29	$-Ni_{L2}(t)$
$C_2 \frac{dv_{C2}(t)}{dt}$	3.30	$i_{L2}(t)$
$\frac{dv_o(t)}{dt}$	$R_o \frac{di_{L2}(t)}{dt}$	$-\frac{R_o(Nv_{C1}(t) + v_{C2}(t) + v_o(t))}{L_2}$

Tabela 3.2: Equações característica do estado ON

$$A_D := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N & -1 & -1 \\ 0 & -N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -NR_o & -R_o & -R_o \end{bmatrix} \quad B_D := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.2.1.2 Estado OFF

No estado OFF o semiconductor está desligado. Este acontecimento leva à polarização direta do díodo e assim o mesmo é capaz de conduzir. Fecha-se uma malha no secundário do transformador, que por sua define a tensão no mesmo lado. A malha única no primário define a corrente nesse lado do transformador, cuja intensidade é igual à da bobina  $L1$ . Em esquema é ilustrado na figura 3.14 a disposição dos componentes do circuito e seus elementos parasitas quando o semiconductor controlado está desligado.

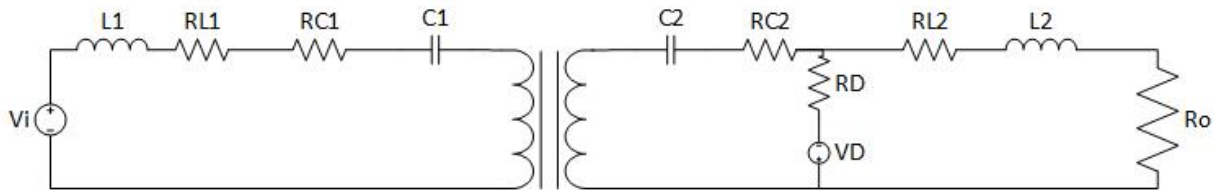


Figura 3.14: Cuk no estado OFF

Na figura 3.15 é representado um circuito equivalente para este modo de operação, onde são considerados as grandezas induzidas no transformador e separados os lados do mesmo. Este esquema simplificará a construção do sistema de equações características no estado OFF, cujas equações estão representadas na tabela 3.3, e auxiliará a criação das matrizes  $A_{D'}$  e  $B_D$ .

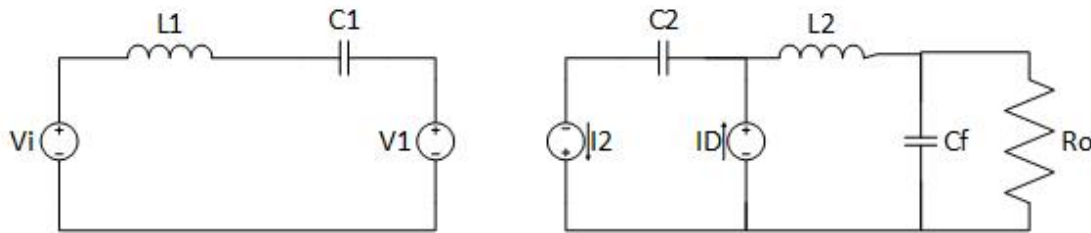


Figura 3.15: Circuito equivalente do Cuk no estado OFF

$$A_{D'} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -N^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -N^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_o \end{bmatrix} \quad B_D := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dinâmica a equacionar	Equações base	Expressão
$L_1 \frac{di_{L1}(t)}{dt}$	3.9 ; 3.39	$v_i - v_{C1}(t) - \frac{v_{C2}(t)}{N}$
$L_2 \frac{di_{L2}(t)}{dt}$	3.15 ; 3.41	$-v_o(t)$
$C_1 \frac{dv_{C1}(t)}{dt}$	3.29	$i_{L1}(t)$
$C_2 \frac{dv_{C2}(t)}{dt}$	3.30	$-\frac{i_{L1}(t)}{N}$
$\frac{dv_o(t)}{dt}$	$R_o \frac{di_{L2}(t)}{dt}$	$-\frac{R_o v_o(t)}{L_2}$

Tabela 3.3: Equações característica do estado OFF

### 3.2.1.3 Modelo de Média

Com a obtenção das matrizes dos coeficientes em cada modo de funcionamento, é possível realizar a equação matricial final do modelo de média. A base para esta transformação passa pelas equações 3.47 e 3.48 para a determinação das matrizes globais e por 3.45 para se expôr este sistema na forma correta. O resultado da aplicação de tais equações revela-se no seguinte sistema matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L1} \\ \dot{i}_{L2} \\ \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \\ \dot{v}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{D'}{L_1} & -\frac{D'N^{-1}}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{DN}{L_2} & -\frac{D}{L_2} & -L_2^{-1} \\ \frac{D'}{C_1} & -\frac{DN}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{D'N^{-1}}{C_2} & \frac{D}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{DNR_o}{L_2} & -\frac{DR_o}{L_2} & -\frac{R_o}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \\ v_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \end{bmatrix}$$

### 3.2.1.4 Funções Transferência e Valores em Regime Permanente

Na obtenção do espaço dos estados é possível passar para a resposta em frequência de cada uma das variáveis de estado. A descoberta de tais funções transferência é possível tendo como base a equação 3.46, que representava a solução das variáveis de estado em função das entradas.

Como a mesma equação exige a inversão de uma matriz 5x5 e dada a dificuldade de a realizar por métodos unicamente humanos, foi requisitado o auxílio ao software MAPLE que computacionou a inversa dessa matriz e mostrou a solução pretendida. O script criado nesse software está exposto no Anexo A. As funções transferências serão expostas a seguir, a partir de 3.54 até 3.63.

$$\frac{i_{L1}}{v_i}(s) = \frac{((s(R_o + sL_2)C_2 + D^2)C_1 + N^2C_2D^2)N^2}{\left( \frac{N^2s^2L_1(R_o + sL_2)C_2 + (sL_1N^2 + R_o + sL_2)D^2}{-2(sL_2 + R_o)D + R_o + sL_2} \right)C_1 + N^2((sL_1N^2 + R_o + sL_2)D^2 - 2(sL_2 + R_o)D + R_o + sL_2)C_2} \quad (3.54)$$

$$\frac{i_{L1}}{v_D}(s) = -\frac{D'N((C_2N^2 + C_1)D + sC_2C_1(R_o + sL_2))}{(C_2N^2 + C_1)\left( \frac{sL_1N^2 + R_o}{+sL_2} \right)D^2 - 2(C_2N^2 + C_1)(R_o + sL_2)D + ((1 + s^2C_2L_1N^2)C_1 + C_2N^2)(R_o + sL_2)} \quad (3.55)$$

$$\frac{i_{L2}}{v_i}(s) = \frac{ND'D(C_2N^2 + C_1)}{(C_2N^2 + C_1)(sL_1N^2 + R_o + sL_2)D^2 - 2(C_2N^2 + C_1)(R_o + sL_2)D + (C_2(1 + s^2C_1L_1)N^2 + C_1)(R_o + sL_2)} \quad (3.56)$$

$$\frac{i_{L2}}{v_D}(s) = \frac{D'((C_2N^2 + C_1)D + (-C_2 - s^2C_2L_1C_1)N^2 - C_1)}{(C_2N^2 + C_1)(sL_1N^2 + R_o + sL_2)D^2 - 2(C_2N^2 + C_1)(R_o + sL_2)D + (C_2(1 + s^2C_1L_1)N^2 + C_1)(R_o + sL_2)} \quad (3.57)$$

$$\frac{v_{C1}}{v_i}(s) = \frac{D'(R_o + sL_2)C_2N^2}{(C_2N^2 + C_1)(sL_1N^2 + R_o + sL_2)D^2 - 2(C_2N^2 + C_1)(R_o + sL_2)D + (C_2(1 + s^2C_1L_1)N^2 + C_1)(R_o + sL_2)} \quad (3.58)$$

$$\frac{v_{C1}}{v_D}(s) = \frac{D'NC_2\left(\left(\frac{L_1N^2 + L_2}{s + R_o}\right)D - R_o - sL_2\right)}{(C_2N^2 + C_1)((L_1N^2 + L_2)s + R_o)D^2 - 2(C_2N^2 + C_1)(R_o + sL_2)D + (R_o + sL_2)(C_2N^2 + C_1 + N^2s^2C_2L_1C_1)} \quad (3.59)$$

$$\frac{v_{C2}}{v_i}(s) = -\frac{D'(R_o + sL_2)NC_1}{(C_2N^2 + C_1)(sL_1N^2 + R_o + sL_2)D^2 - 2(C_2N^2 + C_1)(R_o + sL_2)D + (C_2(1 + s^2C_1L_1)N^2 + C_1)(R_o + sL_2)} \quad (3.60)$$

$$\frac{v_{C2}}{v_D}(s) = -\frac{D'C_1\left(\left(\frac{L_1N^2 + L_2}{s + R_o}\right)D - R_o - sL_2\right)}{(C_2N^2 + C_1)((L_1N^2 + L_2)s + R_o)D^2 - 2(C_2N^2 + C_1)(R_o + sL_2)D + (R_o + sL_2)(C_2N^2 + C_1 + N^2s^2C_2L_1C_1)} \quad (3.61)$$

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{D'D(C_2N^2 + C_1)NR_o}{(C_2N^2 + C_1)(sL_1N^2 + R_o + sL_2)D^2 - 2(C_2N^2 + C_1)(R_o + sL_2)D + (C_2(1 + s^2C_1L_1)N^2 + C_1)(R_o + sL_2)} \quad (3.62)$$

$$\frac{v_o}{v_D}(s) = \frac{-R_oD'((C_2N^2 + C_1)D + (-C_2 - s^2C_2L_1C_1)N^2 - C_1)}{(C_2N^2 + C_1)(sL_1N^2 + R_o + sL_2)D^2 - 2(C_2N^2 + C_1)(R_o + sL_2)D + (C_2(1 + s^2C_1L_1)N^2 + C_1)(R_o + sL_2)} \quad (3.63)$$

O ganho em função da frequência é importante na dinâmica que as variáveis apresentam quando se inserem degraus na entrada, por conseguinte ser objeto de estudo no projeto do controlador a implementar no conversor de forma a que as respostas sejam idealmente de amortecimento crítico, ou seja, sem apresentarem overshoot e o mais rápidas possível.

O ganho em regime permanente é igualmente importante porque será esse o utilizado para definir as variáveis de entrada consoante o objetivo do conversor, ou seja, definem-se por exemplo qual a tensão de entrada e o duty-cycle do conversor para se obter uma certa tensão de saída em

regime permanente. Para a descoberta dos ganhos DC, deve-se recorrer ao teorema do valor final que demonstra o valor final de qualquer função  $f(t)$  que encontre o seu dual em Laplace em  $F(s)$ . Este teorema representa-se em 3.64.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (3.64)$$

Nas respostas temporais destas funções transferência assume-se que as entradas são em degrau, o que torna a função  $F(s)$  semelhante ao escrito na equação 3.65, simplificando a expressão 3.64 para que apenas seja considerado a função do ganho na frequência nula, permitindo um isolamento entre os ganhos e a amplitude dos sinais de entrada.

$$F(s) = \text{Ganho}(s) * \frac{\text{Input}}{s} \quad (3.65)$$

Os resultados da tabela 3.4 seguem a premissa anterior donde apenas se substitui na função transferência correspondente o  $s$  por zero.

Variável de Estado	Expressão Ganho Vi	Expressão Ganho VD
$I_{L1}$	$\frac{N^2 D^2}{D' R_o}$	$-\frac{ND}{D' R_o}$
$I_{L2}$	$\frac{ND}{R_o D'}$	$-\frac{1}{R_o}$
$V_{C1}$	$\frac{N^2 C_2}{D' (N^2 C_2 - C_1)}$	$-\frac{C_2 N}{C_2 N^2 + C_1}$
$V_{C2}$	$-\frac{C_1 N}{D' (N^2 C_2 - C_1)}$	$\frac{C_1}{C_2 N^2 + C_1}$
$V_o$	$\frac{ND}{D'}$	$-1$

Tabela 3.4: Ganhos em regime permanente no modelo ideal

### 3.2.1.5 Cálculo para pequeno sinal

Até agora foram analisados os sinais principais no conversor mas deve-se ter em conta algumas pequenas variações nas variáveis numa situação de regime permanente. Quando se analisa variações nos estados e nas entradas, a equação 3.52 representa o espaço dos estados completo dessa situação. Como é possível verificar nessa equação, as matrizes dos coeficientes para  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{U}$  são exatamente as mesmas que as do sinal principal sendo a matriz da perturbação ao nível do duty-cycle a única a ter mudanças visíveis. A seguinte equação matricial, que tem como base as equações 3.50 e 3.51, apresenta a influência do pequeno sinal do duty-cycle na perturbação da dinâmica das variáveis de estado.

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{L1} \\ \hat{i}_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_1^{-1} & \frac{1}{L_1 N} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{N}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 \\ -C_1^{-1} & -\frac{N}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2 N} & C_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{NR_o}{L_2} & -\frac{R_o}{L_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \\ v_o \end{bmatrix} \hat{d}$$

A obtenção das funções transferência passa pela resolução da equação 3.46 e os ganhos permanentes através do teorema do valor final. As funções estão representadas na primeira matriz e os ganhos DC na segunda.

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{L1} \\ \hat{i}_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{V_i((C_2 N^2 + C_1)(sL_2 + 2R_o)D + sR_o C_2 C_1(R_o + sL_2))N^2}{(-1+D)((L_1 N^2 + L_2)s + R_o)(C_2 N^2 + C_1)D^2 - 2(C_2 N^2 + C_1)(R_o + sL_2)(D) + (R_o + sL_2)(C_2 N^2 + C_1 + N^2 s^2 C_2 L_1 C_1))R_o} \\ -\frac{V_i((C_2 N^2 + C_1)(sL_1 N^2 - R_o)D^2 + R_o(C_2(2 + s^2 C_1 L_1)N^2 + 2C_1)(D) - R_o(C_2(1 + s^2 C_1 L_1)N^2 + C_1))N}{(-1+D)^2((C_2 N^2 + C_1)(sL_1 N^2 + R_o + sL_2)D^2 - 2(C_2 N^2 + C_1)(R_o + sL_2)(D) + (R_o + sL_2)(C_2(1 + s^2 C_1 L_1)N^2 + C_1))R_o} \\ \frac{V_i C_2 N^2((L_1 N^2 + L_2)s + R_o)R_o D^2 + (-2R_o^2 - 2s(L_1 N^2 + L_2)R_o - s^2 L_2 L_1 N^2)(D) + R_o(R_o + sL_2)}{(-1+D)^2((L_1 N^2 + L_2)s + R_o)(C_2 N^2 + C_1)D^2 - 2(C_2 N^2 + C_1)(R_o + sL_2)(D) + (R_o + sL_2)(C_2 N^2 + C_1 + N^2 s^2 C_2 L_1 C_1))R_o} \\ -\frac{V_i C_1 N((L_1 N^2 + L_2)s + R_o)R_o D^2 + (-2R_o^2 - 2s(L_1 N^2 + L_2)R_o - s^2 L_2 L_1 N^2)(D) + R_o(R_o + sL_2)}{(-1+D)^2((L_1 N^2 + L_2)s + R_o)(C_2 N^2 + C_1)D^2 - 2(C_2 N^2 + C_1)(R_o + sL_2)(D) + (R_o + sL_2)(C_2 N^2 + C_1 + N^2 s^2 C_2 L_1 C_1))R_o} \\ -\frac{V_i((C_2 N^2 + C_1)(sL_1 N^2 - R_o)D^2 + R_o(C_2(2 + s^2 C_1 L_1)N^2 + 2C_1)(D) - R_o(C_2(1 + s^2 C_1 L_1)N^2 + C_1))N}{(-1+D)^2((C_2 N^2 + C_1)(sL_1 N^2 + R_o + sL_2)D^2 - 2(C_2 N^2 + C_1)(R_o + sL_2)(D) + (R_o + sL_2)(C_2(1 + s^2 C_1 L_1)N^2 + C_1))} \end{bmatrix} \hat{d}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_{L1} \\ \hat{I}_{L2} \\ V_{C1} \\ V_{C2} \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 \frac{N^2 v_i D}{D^3 R_o}}{\frac{N v_i}{R_o D^2}} \\ \frac{C_2 N^2 v_i}{D^2 (C_2 N^2 + C_1)} \\ -\frac{C_1 v_i N}{D^2 (C_2 N^2 + C_1)} \\ \frac{N v_i}{D^2} \end{bmatrix} \hat{d}$$

### 3.2.2 Inclusão de elementos parasitas

Nesta secção incluem-se os elementos parasitas de cada um dos componentes reativos e dos semicondutores utilizados, de forma a modelar o espaço dos estados aproximado à realidade empírica do conversor. Até esta secção consideram-se todos os componentes ideais, convenção que permitiu inicializar a construção do modelo de forma simples.

Cada elemento parasita neste circuito afetará uma ou mais equações da dinâmica das variáveis de estado e o objetivo para a inclusão dos mesmos é a observação dos seus efeitos nos regimes transitório e permanente do conversor.

Cada bobina tem uma resistência elétrica associada que consome potência ativa, característica que reduz a magnitude da indução electromagnética. Este facto é revisto na equação 3.6. A influência das resistências elétricas das bobinas é permanente em todo o ciclo do conversor dado que estarão sempre em série com as bobinas respetivas, tendo sempre a mesma função de tensão



e corrente. As matrizes seguintes representam o efeito destes elementos parasitas para o caso dos indutores de entrada e saída.

$$A_{RL1} = R_{L1} * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{RL2} = R_{L2} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_o & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como estes elementos serão os únicos que influenciaram o conversor da mesma forma em todo o período dos ciclos, é possível designar uma matriz  $A_{\text{permanente}}$ , que representará em conjunto os efeitos das resistências dos indutores.

$$A_{\text{permanente}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{L1}}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_{L2}}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_o R_{L2}}{L_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As resistências nos condensadores estão sujeitas à mesma corrente dos respectivos condensadores. Ao contrário do caso anterior, estas correntes não são constantes, dado que a corrente nos condensadores, estando dependente dos sinais no transformador, varia consoante o modo de operação.

Na análise matricial do efeito das resistências no condensador devem ser separados os vários modos de funcionamento e por isso serão apresentadas duas matrizes para cada resistência, uma delas válida para o período de trabalho do semiconductor controlado e outra para o tempo complementar. Os resultados destas matrizes têm por base a equação 3.27.

$$A_{D\text{-}RC1} = R_{C1} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_o N^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{D'\text{-}RC1} = R_{C1} * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Na resistência do condensador do primário verifica-se que a sua matriz  $D'$  é igual à matriz da resistência da bobina de entrada. Este facto ocorre devido ao bloqueio do switch criar apenas uma malha no primário e consequentemente colocar em série estas duas resistências. O mesmo caso, em tempos complementares, há-de suceder para as resistências do condensador e bobina do lado secundário.

$$A_{D\text{-}RC2} = R_{C2} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_o & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{D'\text{-}RC2} = R_{C2} * \begin{bmatrix} N^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A implementação de semicondutores reais inclui efeitos indesejáveis na fase de condução. No caso do switch, apenas existirá efeitos originários da resistência de condução quando se estiver no período de trabalho do mesmo, ou seja, dentro de  $D$ . Adversamente, o díodo introduzirá efeitos adversos no tempo complementar. Nas duas próximas matrizes, o efeito do switch real está representado à esquerda e o do díodo à direita.

$$A_{R\text{Son}} = R_{\text{Son}} * \begin{bmatrix} -1 & -N & 0 & 0 & 0 \\ N & N^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_o N & R_o N^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{R\text{Don}} = R_{\text{Don}} * \begin{bmatrix} N^{-2} & N^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -N^{-1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_o N^{-1} & -R_o & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por fim, o díodo acrescenta uma tensão de condução parasita, representada por  $V_D$ . Para este modelo a mesma deve ser considerada constante e equiparando-se a uma entrada do conversor. Esta variável afeta a matriz  $\mathbf{B}$  transformando-a no seguinte:

$$B_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 1 & D'N^{-1} \\ 0 & -D' \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -R_o D' \end{bmatrix}$$

Com todas as matrizes dos coeficientes referentes aos elementos parasitas construída, deve-se partir para a soma das mesmas, consoante o período em que estão ativas. Quando o switch está ligado, a matriz  $\mathbf{A}$  base é a obtida no modelo ideal e a partir daí são somados os efeitos adversos correspondente a esse intervalo de tempo. A equação 3.66 demonstra o passo realizado e a matriz seguinte o resultado.

$$A_D = A_{D\text{-}Ideal} + A_{D\text{-}RC1} + A_{D\text{-}RC2} + A_{R\text{Son}} \quad (3.66)$$

$$A_D = \begin{bmatrix} -\frac{R_{Son}}{L_1} & -\frac{R_{Son}N}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{Son}N}{L_2} & \frac{(R_{C1}+R_{Son})N^2-R_{C2}}{L_2} & -\frac{N}{L_2} & -L_2^{-1} & -L_2^{-1} \\ 0 & -\frac{N}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_o R_{Son}N}{L_2} & R_o \frac{(R_{C1}+R_{Son})N^2-R_{C2}}{L_2} & -\frac{R_o N}{L_2} & -\frac{R_o}{L_2} & -\frac{R_o}{L_2} \end{bmatrix}$$

No mesmo sentido, quando o switch desliga e o díodo passa a conduzir, a equação 3.67 demonstra o passo realizado e a matriz seguinte o resultado.

$$A_{D'} = A_{D'-Ideal} + A_{D'-RC1} + A_{D'-RC2} + A_{RDon} \quad (3.67)$$

$$A_{D'} = \begin{bmatrix} \frac{-R_{C1}N^2+R_{C2}+R_{Don}}{L_1N^2} & \frac{R_{Don}}{L_1N} & -L_1^{-1} & -\frac{1}{L_1N} & 0 \\ -\frac{R_{Don}}{L_2N} & -\frac{R_{Don}}{L_2} & 0 & 0 & -L_2^{-1} \\ C_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_2N} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_o R_{Don}}{L_2N} & -\frac{R_o R_{Don}}{L_2} & 0 & 0 & -R_o \end{bmatrix}$$

Utilizando a equação 3.68 são unidas as matrizes **A** descobertas no modelo real e criado o sistema matricial que demonstra o comportamento do conversor quando são introduzidos os elementos parasitas.

$$\mathbf{A} = D\mathbf{A}_D + D'\mathbf{A}_{D'} + \mathbf{A}_{permanente} \quad (3.68)$$

$$A_{real} = \begin{bmatrix} \frac{(R_{C2}+R_{Don}-R_{C1}N^2)D'-DR_{Son}N^2-R_{L1}N^2}{L_1N^2} & \frac{D'R_{Don}-DR_{Son}N^2}{L_1N} & -\frac{D'}{L_1} & -\frac{D'}{L_1N} & 0 \\ \frac{DR_{Son}N^2-D'R_{Don}}{L_2N} & \frac{((R_{C1}+R_{Son})N^2-R_{C2})D-D'R_{Don}-R_{L2}}{L_2} & -\frac{DN}{L_2} & -\frac{D}{L_2} & -L_2^{-1} \\ \frac{D'}{C_1} & -\frac{DN}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{D'}{C_2N} & \frac{D}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ R_o \frac{DR_{Son}N^2-D'R_{Don}}{L_2N} & R_o \frac{((R_{C1}+R_{Son})N^2-R_{C2})D-D'R_{Don}-R_{L2}}{L_2} & -\frac{DNR_o}{L_2} & -\frac{DR_o}{L_2} & -\frac{R_o}{L_2} \end{bmatrix}$$

### 3.2.2.1 Funções Transferência e Valores DC

Com a obtenção das matrizes no modelo real e utilizando a equação solução do sistema matricial 3.46 são descobertas as funções transferência de cada variável de estado em relação à tensão de entrada e à de condução direta do díodo. As funções transferências serão expostas no Anexo B, no fim do documento, desde a equação 6.1 até 6.10. Isto deve-se ao volume que as mesmas atingiram e à impossibilidade de as mostrar numa página A4.

Como foi realizado para o caso ideal, a obtenção dos ganhos DC de cada variável pode ser obtido fazendo uso das equações 3.64 e 3.65. As seguintes tabelas 3.5 e 3.6 apresentam os ganhos em função de  $v_i$  e  $v_d$ .

Variável de Estado	Expressão Ganho $V_i$
$I_{L1}$	$-\frac{N^2 D^2}{((-R_{L1}+R_{C1})N^2-R_{L2}+R_{C2}-R_o)D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}+2R_{L2}+2R_o)D-R_o-R_{Don}-R_{L2}}$
$I_{L2}$	$-\frac{ND'D}{((-R_{L1}+R_{C1})N^2-R_{L2}+R_{C2}-R_o)D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}+2R_{L2}+2R_o)D-R_o-R_{Don}-R_{L2}}$
$V_{C1}$	$\frac{N^2((R_{C1}N^2+R_{C2})D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2+R_o+R_{L2}-R_{C2}+R_{Don})D-R_o-R_{Don}-R_{L2})C_2}{(((R_{L1}+R_{C1})N^2-R_{L2}+R_{C2}-R_o)D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}+2R_{L2}+2R_o)D-R_o-R_{Don}-R_{L2})(C_2N^2+C_1)}$
$V_{C2}$	$-\frac{N((R_{C1}N^2+R_{C2})D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2+R_o+R_{L2}-R_{C2}+R_{Don})D-R_o-R_{Don}-R_{L2})C_1}{(((R_{L1}+R_{C1})N^2-R_{L2}+R_{C2}-R_o)D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}+2R_{L2}+2R_o)D-R_o-R_{Don}-R_{L2})(C_2N^2+C_1)}$
$V_o$	$-\frac{ND'DR_o}{((-R_{L1}+R_{C1})N^2-R_{L2}+R_{C2}-R_o)D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}+2R_{L2}+2R_o)D-R_o-R_{Don}-R_{L2}}$

Tabela 3.5: Ganhos em relação à tensão de entrada em regime permanente no modelo real

### 3.2.2.2 Cálculo para pequeno sinal

Utilizando o mesmo processo que o caso ideal, é possível apresentar as seguintes matrizes dos coeficientes de pequeno sinal da dinâmica do conversor em função da perturbação no duty-cycle. As equações 3.50 e 3.51 foram a base deste processo.

$$A_{dreal} = \begin{bmatrix} \frac{(R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}-R_{Don}}{L_1N^2} & -\frac{R_{Don}+R_{Son}N^2}{L_1N} & L_1^{-1} & \frac{1}{L_1N} & 0 \\ \frac{R_{Son}N^2+R_{Don}}{L_2N} & \frac{(R_{C1}+R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}}{L_2} & -\frac{N}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 \\ -C_1^{-1} & -\frac{N}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2N} & C_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ R_o \frac{R_{Son}N^2+R_{Don}}{L_2N} & R_o \frac{(R_{C1}+R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}}{L_2} & -\frac{NR_o}{L_2} & -\frac{R_o}{L_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{dreal} = \begin{bmatrix} -N^{-1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ R_o \end{bmatrix}$$

## 3.3 Transição do modelo unidirecional para o bidirecional

O comportamento do conversor Cuk unidirecional é descrito pelas funções transferência da secção 3.2.2. Um dos objetivos previstos para este trabalho passa pelo projeto de uma topologia bidirecional, cuja respetiva topologia unidirecional será o ponto de partida para a criação de um modelo emparelhado com esse ponto.

Com a topologia bidirecional ocorrem algumas mudanças no circuito, seja ao nível físico do conversor ou mesmo no modelo do espaço dos estados. O trânsito de potências é possível nos dois sentidos se existirem fontes de energias em ambos os lados do conversor. Com esta premissa, a carga resistiva na saída da topologia unidirecional será substituída por uma fonte de tensão, representando um dos elementos de armazenamento de energia, em paralelo com a fonte de entrada, já introduzida no primeiro modelo.

Variável de Estado	Expressão Ganho $V_D$
$I_{L1}$	$\frac{ND'D}{((-R_{L1}+R_{C1})N^2-R_{L2}+R_{C2}-R_o)D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}+2R_{L2}+2R_o)D-R_o-R_{Don}-R_{L2}}$
$I_{L2}$	$\frac{D'^2}{((-R_{L1}+R_{C1})N^2-R_{L2}+R_{C2}-R_o)D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}+2R_{L2}+2R_o)D-R_o-R_{Don}-R_{L2}}$
$V_{C1}$	$-\frac{((R_o+R_{L2}+R_{L1}N^2)D-R_o-R_{L2})D'NC_2}{(((R_{L1}+R_{C1})N^2-R_{L2}+R_{C2}-R_o)D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}+2R_{L2}+2R_o)D-R_o-R_{Don}-R_{L2})(C_2N^2+C_1)}$
$V_{C2}$	$-\frac{((R_o+R_{L2}+R_{L1}N^2)D-R_o-R_{L2})D'C_1}{(((R_{L1}+R_{C1})N^2-R_{L2}+R_{C2}-R_o)D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}+2R_{L2}+2R_o)D-R_o-R_{Don}-R_{L2})(C_2N^2+C_1)}$
$V_o$	$-\frac{R_oD'^2}{((-R_{L1}+R_{C1})N^2-R_{L2}+R_{C2}-R_o)D^2+((-R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}+2R_{L2}+2R_o)D-R_o-R_{Don}-R_{L2}}$

Tabela 3.6: Ganhos em relação à tensão de condução direta no díodo em regime permanente no modelo real

Num Cuk bidirecional emerge a necessidade de incluir switches nos dois lados dado que o controlo destes é essencial para definir o sentido das correntes. Estes semicondutores controlados devem ser acompanhados por um díodo em anti-paralelo com o intuito de haver um par switch-díodo, como na topologia unidirecional, nos dois sentidos. Na figura 3.16 ocorre a mudança ao nível dos semicondutores e a troca da carga pela fonte de tensão na saída do conversor.

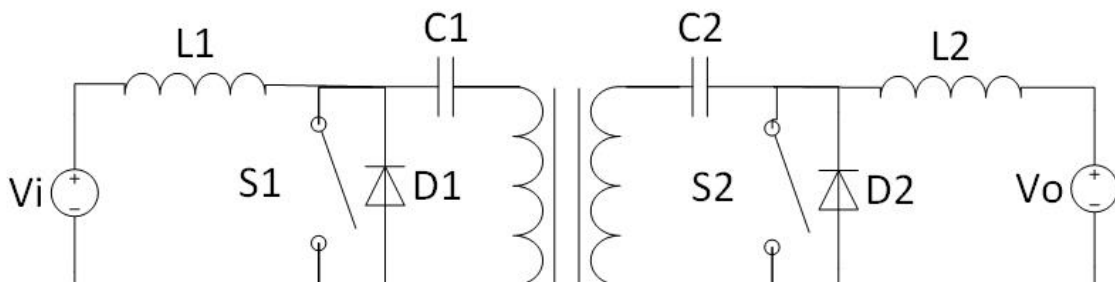


Figura 3.16: Topologia Cuk Bidirecional Isolada

No modelo a seguir representado considera-se que apenas um semicondutor controlado funciona de cada vez, dependendo do sentido da corrente pretendido. Para se trocar de sentido deve-se primeiro desligar as entradas do conversor para todas as variáveis voltarem a zero.

As mudanças ao nível do modelo matemático podem implicar algumas simplificações ao nível de cálculo. A tensão de saída, sendo agora definida por uma fonte de tensão, ingressa a matriz das entradas do conversor saindo das variáveis de estado. Tal mudança obriga a assunção de que essa tensão não varia, podendo ser retirada a última linha de  $\mathbf{X}$  e das matrizes dos coeficientes dado que  $\frac{dv_o(t)}{dt} = 0$ . A coluna de  $\mathbf{A}$  relacionada com a tensão de saída move-se para  $\mathbf{B}$ . Com esta alteração representada pelas seguintes matrizes,  $\mathbf{A}$  tem uma nova dimensão de 4x4 e  $\mathbf{B}$  4x3. As matrizes a seguir representadas demonstram a mudança realizada nas matrizes dos coeficientes referentes à topologia unidirecional.

$$A_{\text{bidirecional}} = \begin{bmatrix} \frac{(R_{C2}+R_{Don}-R_{C1}N^2)D'-DR_{Son}N^2-R_{L1}N^2}{L_1N^2} & \frac{D'R_{Don}-DR_{Son}N^2}{L_1N} & -\frac{D'}{L_1} & -\frac{D'}{L_1N} \\ \frac{DR_{Son}N^2-D'R_{Don}}{L_2N} & \frac{((R_{C1}+R_{Son})N^2-R_{C2})D-D'R_{Don}-R_{L2}}{L_2} & -\frac{DN}{L_2} & -\frac{D}{L_2} \\ \frac{D'}{C_1} & -\frac{DN}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{D'}{C_2N} & \frac{D}{C_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{\text{bidirecional}} = \begin{bmatrix} L_1^{-1} & 0 & \frac{D'}{NL_1} \\ 0 & -L_2^{-1} & -\frac{D'}{L_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com estas alterações aponta-se também nas matrizes a seguir dispostas as mudanças em relação às variáveis de estado, entradas do conversor e coeficientes da matriz **K**.

$$K_{\text{bidirecional}} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad X_{\text{bidirecional}} = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} \quad U_{\text{bidirecional}} = \begin{bmatrix} v_i \\ v_o \\ v_D \end{bmatrix}$$

Em relação ao pequeno sinal, ocorrem poucas mudanças comparativamente ao modelo unidirecional. De seguida representa-se o sistema matricial de pequeno sinal no modelo bidirecional, com os elementos parasitas incluídos.

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{L1} \\ \hat{i}_{L2} \\ \hat{v}_{C1} \\ \hat{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(R_{C1}-R_{Son})N^2-R_{C2}-R_{Don}}{L_1N^2} & -\frac{R_{Don}+R_{Son}N^2}{L_1N} & L_1^{-1} & \frac{1}{L_1N} \\ \frac{R_{Son}N^2+R_{Don}}{L_2N} & \frac{(R_{C1}+R_{Son})N^2-R_{C2}+R_{Don}}{L_2} & -\frac{N}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -C_1^{-1} & -\frac{N}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2N} & C_2^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -N^{-1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_D \end{bmatrix}$$

Numa situação em que o sentido das correntes muda para o contrário do previsto até agora, deve-se assumir que a entrada passa a ser a saída e vice-versa. Como a topologia Cuk reflete um conversor com simetria perfeita visto a partir dos lados do transformador, é possível utilizar as mesmas equações e matrizes obtidas sendo necessário alterar alguns elementos.

As bobinas, condensadores e os seus elementos parasitas correspondentes permutam entre si. A razão de transformação é invertida dado que a corrente passará de um lado com mais enrolamentos para outro com menos. As fontes de tensão trocam entre si. As novas correntes e tensões desenhadas no novo esquema são o simétrico das anteriores.

## Capítulo 4

# Simulação do Modelo do Conversor

A fase de testes ao modelo de média criado para este conversor será descrito neste capítulo. O objetivo consiste em transitar de um modelo matemático para o circuito simulado e verificar se as respostas ao degrau tanto do modelo como na simulação correspondem.

Os modelos designados para o conversor obtêm bastantes incógnitas, tanto ao nível dos componentes utilizados como entradas do conversor. Esta realidade obriga a cálculos de forma a retirar as incógnitas. Para isso é necessário criar algumas condições de uma situação de funcionamento a simular.

A primeira condição possível de impôr no funcionamento do conversor será a percentagem de ripple existente nas variáveis de estados consideradas em relação ao seu valor médio. Utilizando as equações 3.13, 3.19 e 3.33 para o caso real obtêm-se o valor dos componentes reativos consoante a percentagem de ripple pretendida.

Propriedades	Valor
$V_i$	12 V
$R_o$	10 $\Omega$
D	0.4
$\hat{d}$	0.03 e -0.10
$F_S$	50 kHz
$L_1$	0.7125 mH
$L_2$	11.05 mH
$C_1$	3 $\mu$ F
$C_2$	3 $\mu$ F
N	4

Tabela 4.1: Valores utilizados na simulação ideal e real

Na simulação ideal do conversor, não são considerados os elementos parasitas dos componentes. Pelo contrário, na simulação real as resistências parasitas e a tensão de condução direta no diodo não são nulas, tendo os seus valores indicados na tabela 4.2. Estes valores foram inspirados

pela referência [6], com algumas alterações de forma às simulações não apresentarem rendimentos extremamente baixos.

Propriedades	Valor
$R_{L1}$	$0.5 \Omega$
$R_{L2}$	$0.5 \Omega$
$R_{C1}$	$0.05 \Omega$
$R_{C2}$	$0.05 \Omega$
$R_{Son}$	$0.55 \Omega$
$R_{Don}$	$0.025 \Omega$
$V_D$	$0.7 \text{ V}$

Tabela 4.2: Valores dos componentes parasitas utilizados na simulação real

De forma a simular os modelos obtidos foram criados um modelo matemático na ferramenta simulink e um circuito simulado no Simscape, ambos software do matlab. A dimensão analítica deste conversor e o elevado número de componentes reativos conduz a partição do modelo ilustrado em 4.1 em pequenos blocos. Cada bloco tem ligações com os outros, como é visto na mesma figura, e alguns sinais de interesse para analisar os seus gráficos.

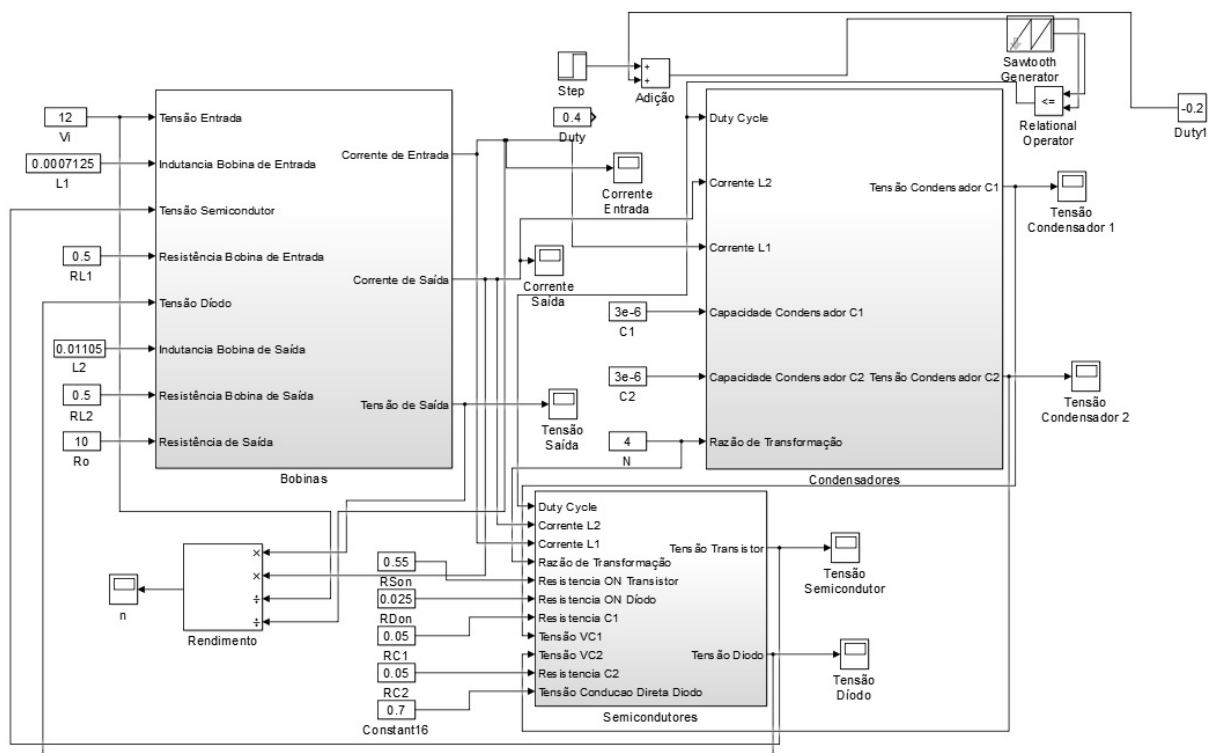


Figura 4.1: Modelo Matemático do Simulink

O primeiro bloco apresentado em 4.2 demonstra a análise da dinâmica nas bobinas. Existe aqui uma relação tensão com corrente onde inicialmente é calculada a diferença de potencial de cada



bobina tendo como auxílio o bloco de somas e ligando as parcelas correspondentes às equações das bobinas representadas em 3.10 e 3.16. O resultado da função da tensão dos indutores passa para um integrador e divide-se pela indutância respectiva de forma a serem obtidas as correntes de entrada e saída, que são as mesmas que as das bobinas.

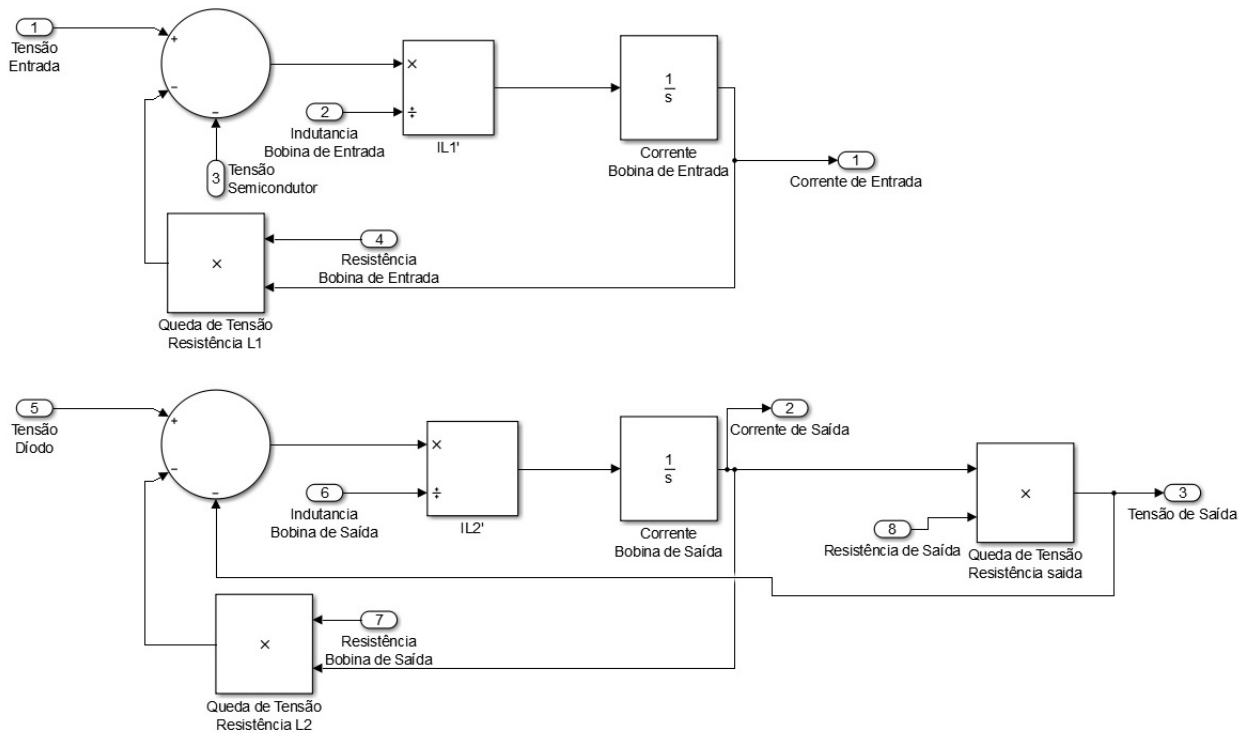


Figura 4.2: Modelo Matemático do Simulink (Bobinas)

O bloco referente ao comportamento dos condensadores é ilustrado em 4.3 e relaciona inicialmente as correntes que atravessam cada condensador num ciclo do conversor. Reutilizando o bloco das somas são contabilizadas as proporções de cada corrente através do duty-cycle e por fim, de forma semelhante ao caso do indutor, o resultado da soma é dividido pela capacidade respectiva e integrada de forma a visualizar as tensões nos condensadores. Este modelo tem por base as equações obtidas em 3.29, 3.30,

O último bloco representado em 4.4 mostra o cálculo das tensões e correntes nos semicondutores, tanto no switch como no díodo.

Para testar a validade das funções transferência obtidas teoricamente foi desenhado um circuito simulado do conversor Cuk unidirecional, como ilustrado em 4.5. Os valores dos componentes foram adaptados aos das tabelas 4.1 e 4.2. Foram usados dois circuitos onde num deles não se consideram os elementos parasitas e serviu de teste para os resultados da topologia ideal. O circuito 4.5 apresenta a topologia real, exceptuando as perdas de condução no transformador e as de comutação no semicondutor.

Como a topologia unidirecional apresenta uma carga resistiva, apenas serão representados na parte da saída o gráfico da resposta ao degrau da tensão na mesma devido à proporção de  $R_o$

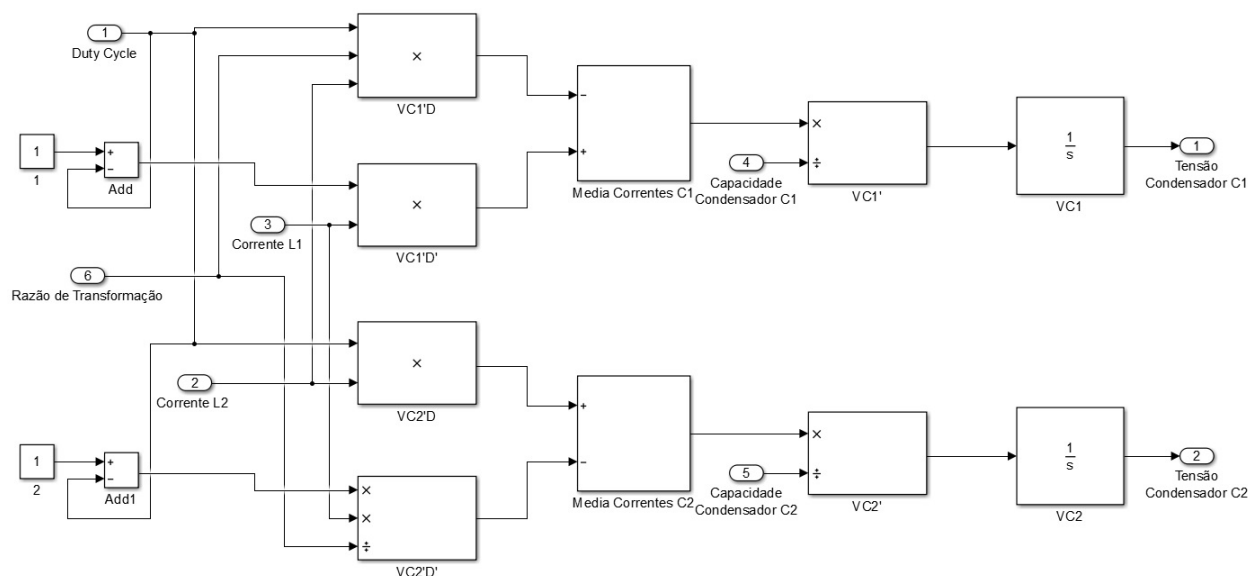


Figura 4.3: Modelo Matemático do Simulink (Condensadores)

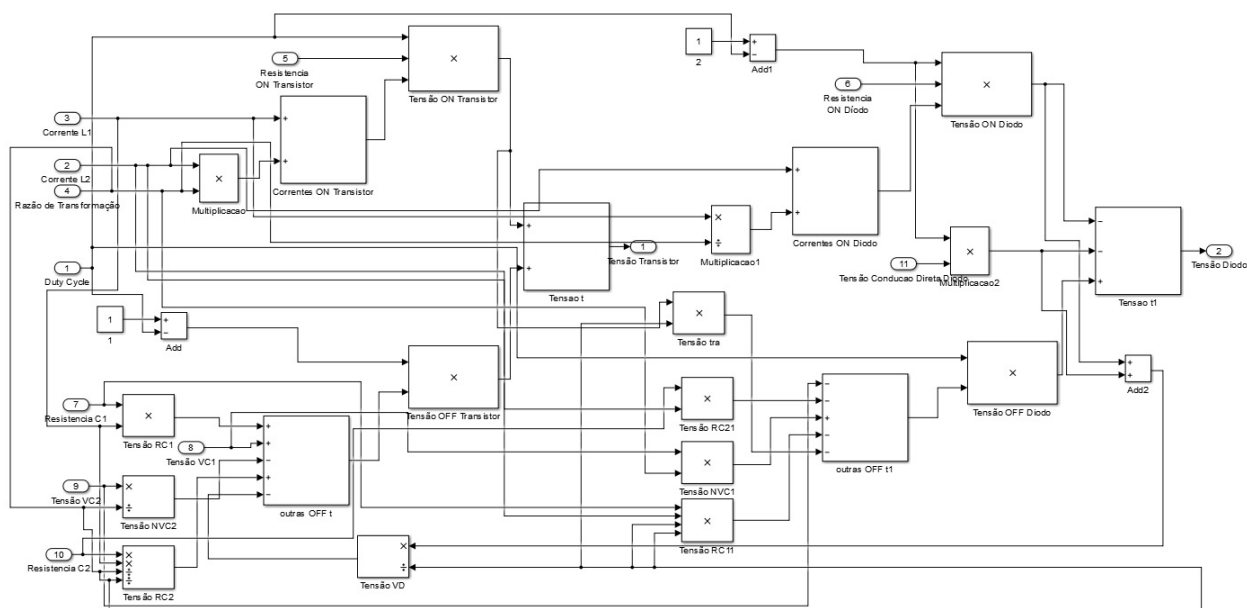


Figura 4.4: Modelo Matemático do Simulink (Semicondutores)

existente entre a tensão e corrente de saída. Outro gráfico interessante de análise, no caso real, será o da corrente de entrada por não existir nenhuma dependência linear com outra variável de estado.

Em 4.6 é apresentada a resposta do conversor a um degrau em tensão em relação à tensão de saída e 4.7 à corrente de entrada.

Como é possível verificar nessas mesmas figuras, o modelo criado através do espaço dos estados define com boa qualidade a dinâmica destas grandezas numa situação de início de funcionamento.

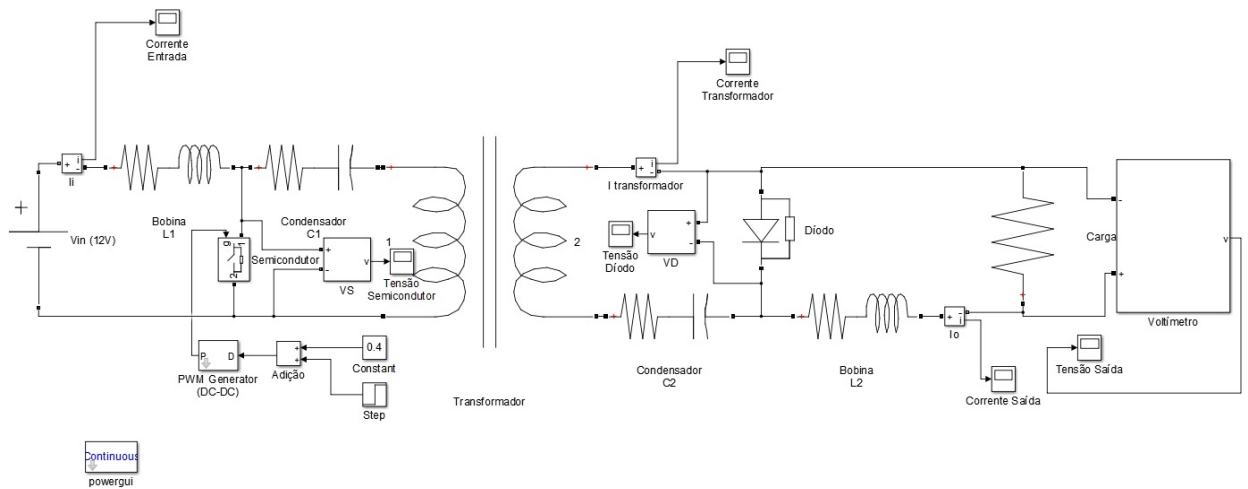


Figura 4.5: Conversor Cuk no Simscape

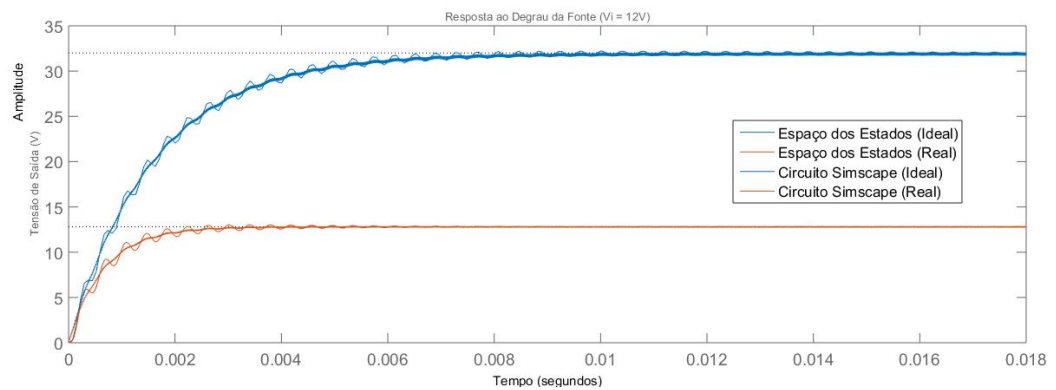


Figura 4.6: Dinâmica da Tensão de Saída com degrau da Fonte (caso ideal e real)

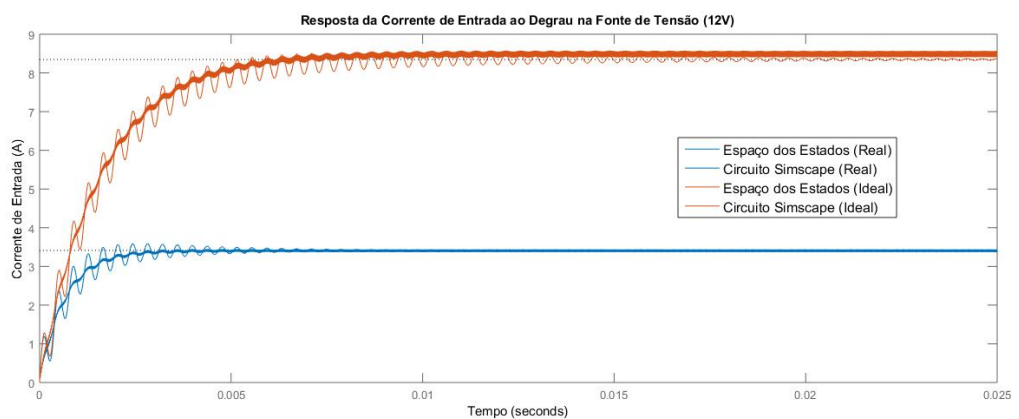


Figura 4.7: Dinâmica da Corrente de Entrada com degrau da Fonte (caso real)

Outra característica importante a validar é a dinâmica imposta nas mesmas grandezas numa situação em que o conversor trabalha num certo ponto de funcionamento (com um duty-cycle

fixo e em regime permanente) e perturba-se em pequena escala o duty-cycle. De seguida serão avaliadas a tensão de saída num regime de perturbação de 3% no  $D$  e no fim de -10%. As figuras 4.8 refletirá a perturbação de pequena magnitude no caso de componentes ideais e 4.9 no caso real. Por fim em 4.10 aplica-se a perturbação maior de -10%.

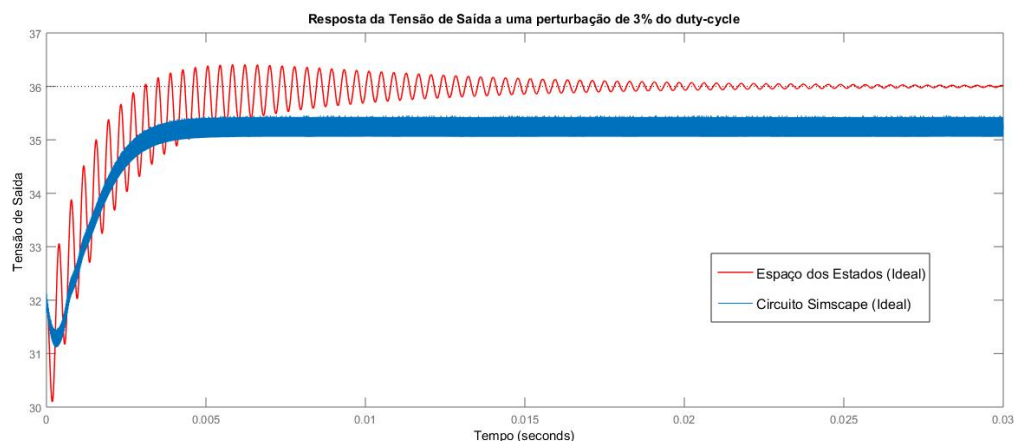


Figura 4.8: Dinâmica da Tensão de Saída com perturbação de 3% do duty-cycle (caso ideal)

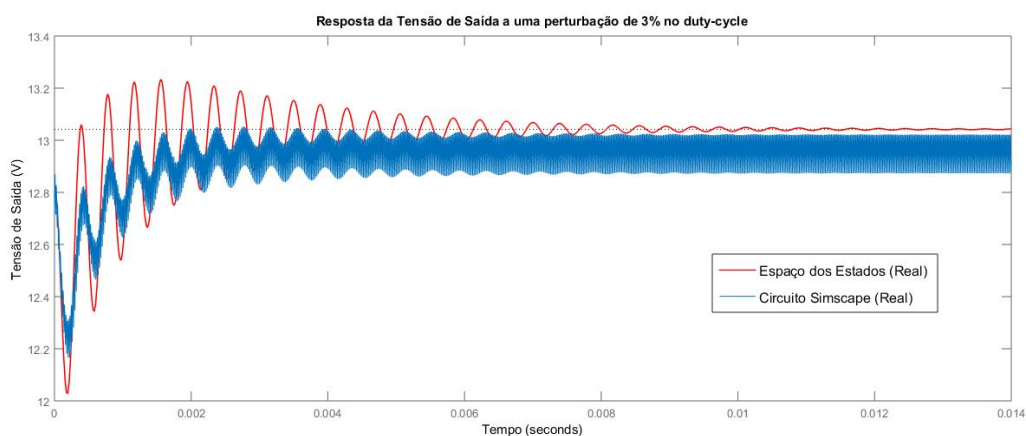


Figura 4.9: Dinâmica da Tensão de Saída com perturbação de 3% do duty-cycle (caso real)

O modelo criado para o conversor Cuk é uma aproximação da realidade, dado que se assume que as variáveis de estado não possuem ripple num regime permanente. Uma variação do duty-cycle, por mais pequena que seja, neste modelo consiste noutra aproximação dado que o sistema foi linearizado de modo a simplificar a obtenção de resultados.

Esta linearização promove a proibição de grandes perturbações no duty-cycle pelos resultados previstos serem díspares com a verdade com o aumento da perturbação. Caso disso ocorra na comparação de 4.9 com 4.10. A diferença no regime permanente entre o modelo e o circuito simulado quando a perturbação é de 3% é de cerca de 100mV, ao passo que nos -10% já se aproxima de 1V.

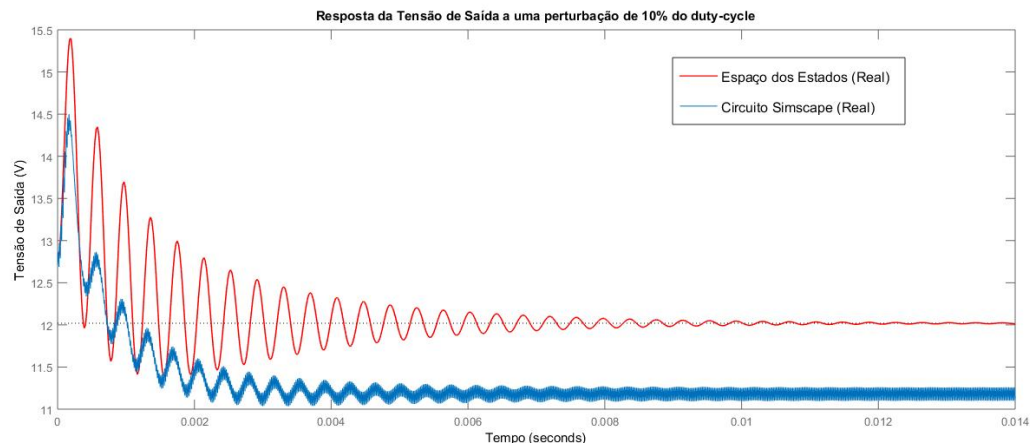


Figura 4.10: Dinâmica da Tensão de Saída com perturbação de 10% do duty-cycle (caso real)

Entre o caso ideal e o real verifica-se que, para o ponto de funcionamento explicitado na tabela 4.1, os valores no regime permanente são bastantes diferentes, o que influencia igualmente a linearização. Em comparação dos casos ideal e real na perturbação de 3%, regressa-se à diferença visível apontada anteriormente, onde no caso em que a tensão final é bem maior, a disparidade do modelo também é maior.

Será de seguida analisado estas situações de perturbações no duty-cycle para a corrente de entrada, onde as figuras

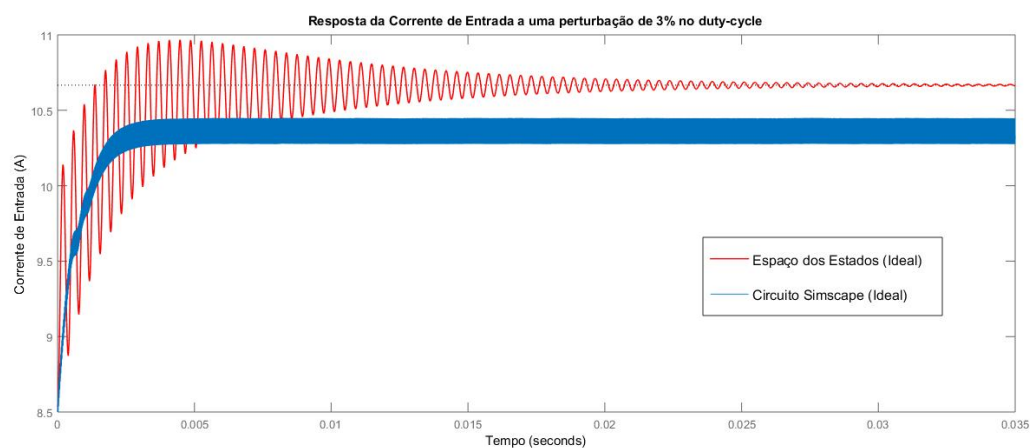


Figura 4.11: Dinâmica da Corrente de Entrada com perturbação de 3% do duty-cycle (caso ideal)

De seguida mostra-se os diagramas de Bode da tensão de saída em 4.14 para o caso ideal e o real, podendo-se comparar os mesmos.

A eficácia do conversor é uma característica de foque principal para este trabalho tendo em conta a aplicação a realizar. Para um caso ideal, onde não existem elementos que consumam energia fornecida pela entrada, a eficácia seria de 100% porque toda a energia libertada na entrada teria o seu consumo na saída. Numa análise tendo como base temporal um instante, é possível

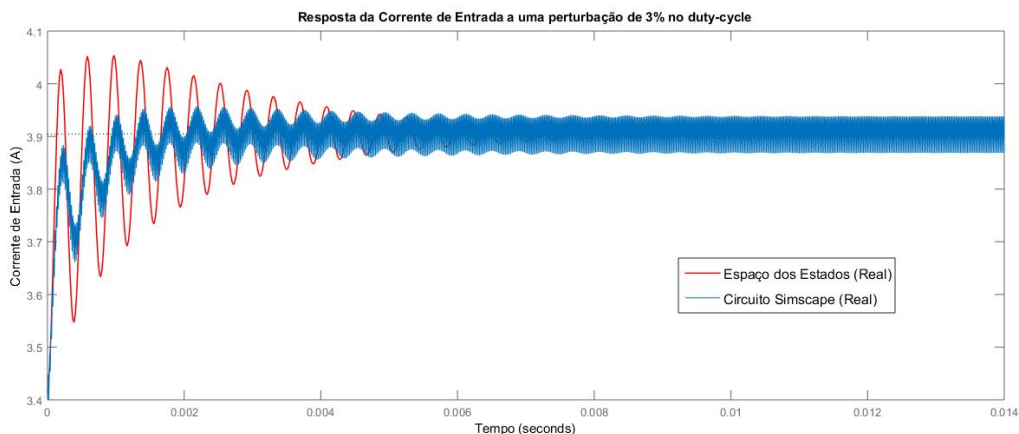


Figura 4.12: Dinâmica da Corrente de Entrada com perturbação de 3% do duty-cycle (caso real)

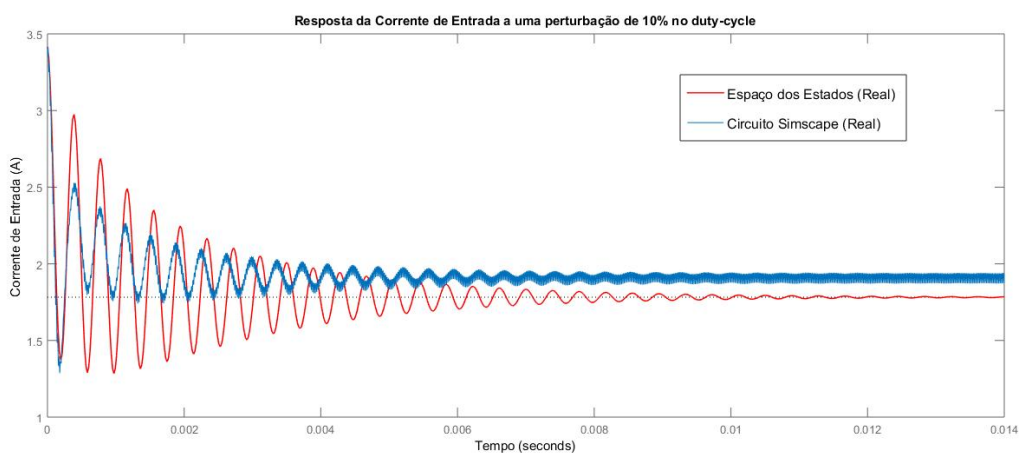


Figura 4.13: Dinâmica da Corrente de Entrada com perturbação de 10% do duty-cycle (caso real)

realizar a proporção entre a energia libertada e consumida através do jogo de potências associado respetivamente à entrada e saída. Uma equação representante deste problema demonstra-se em 4.1 e 4.2, cujo  $E$  representa a energia e  $P$  a potência instantânea.

$$Rendimento(\%) = \frac{E_{saída}}{E_{entrada}} * 100\% \quad (4.1)$$

$$Rendimento(\%) = \frac{P_o}{P_i} * 100\% \quad (4.2)$$

Com a análise de potências elétricas em ambos os lados do conversor, pode-se seguir a equação 3.1 de forma a relacionar o rendimento com as grandezas do conversor descobertas pelo modelo de média e cujo resultado está representado em 4.3 para o caso unidirecional.

$$Rendimento(\%) = \frac{V_o * I_o}{V_i * I_i} * 100\% \quad (4.3)$$

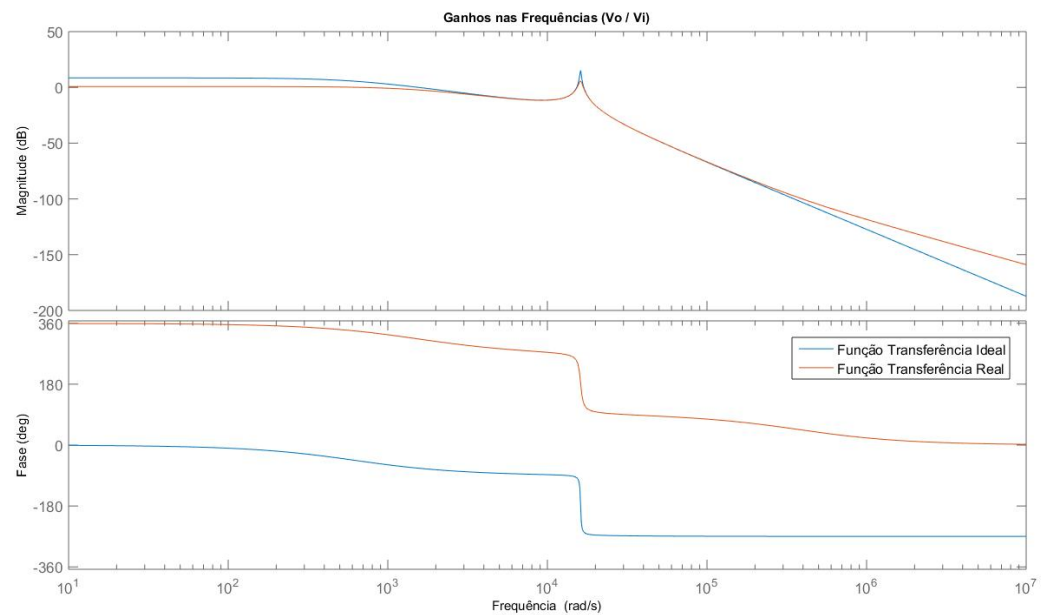


Figura 4.14: Diagrama de Bode comparativo entre os casos ideal e real do ganho de tensão

Os valores das grandezas necessárias ao cálculo do rendimento podem ser obtidas a partir do teorema do valor final cuja equação está representada em 3.64. Utilizando os valores parasitas e ideais das tabelas no início do capítulo concretizou-se o gráfico 4.15.

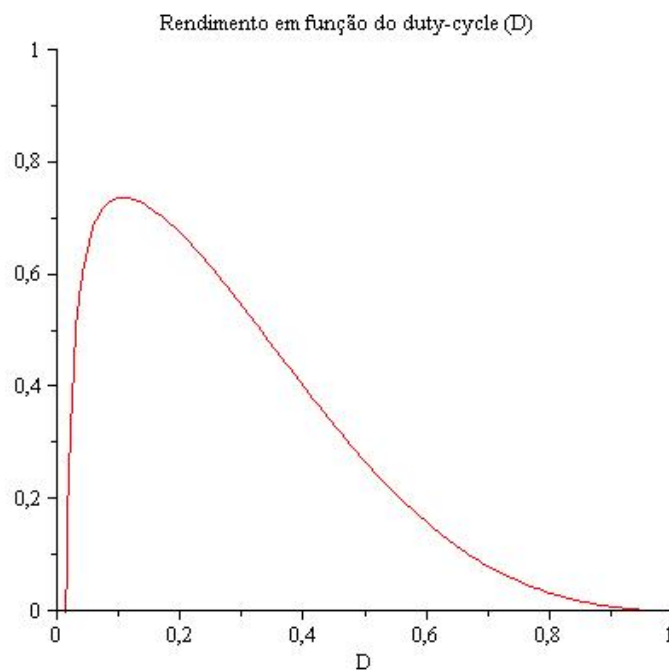


Figura 4.15: Gráfico da função do rendimento em função do duty-cycle (caso real)

Nos testes utilizados anteriormente com duty-cycle variado aproveitaram-se as proporções de

40% inicialmente e depois de 30% para avaliar o rendimento no circuito com parasitas. O teorema do valor final e a equação 4.3 permitiram obter o rendimento em regimes permanentes nas duas situações de  $D$ . A ilustração 4.16 demonstra a validade da equação do rendimento para o conversor Cuk.

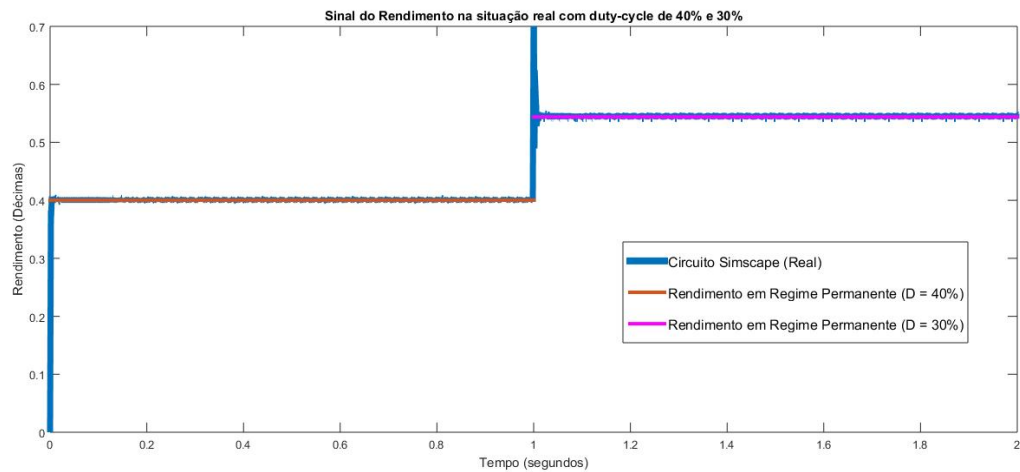


Figura 4.16: Dinâmica do Rendimento para o caso real com dois duty-cycles diferentes (40% e 30%)



## Capítulo 5

# Conclusão

### 5.1 Discussão de Resultados

No desenvolvimento do projeto foram obtidos alguns resultados importantes. A escolha do conversor Cuk para ser a solução do projeto simplificou em parte o objetivo do estudo teórico e analítico do conversor escolhido. Isto deveu-se ao facto de o mesmo só possuir dois estados de trabalho. Outros conversores e também técnicas de controlo possuem mais estados, o que complicava a resolução do modelo de média.

No estudo realizado ao conversor Cuk foram obtidas as funções transferência para os casos onde se consideravam ou não os elementos parasitas, permitindo uma comparação entre ganhos nas duas situações. O rendimento do processo baixa claramente com o aumento dos valores dos elementos parasitas o que demonstra uma necessária cautela na escolha dos componentes reativos, ou seja, deve-se ter em conta as suas perdas para além do seu calibre.

Um facto importante a referir é que as resistências parasitas introduzem uma perda de tensão nos indutores e consequentemente um declive na variação das correntes mais baixa do que no caso ideal, o que permite baixar a indutância da bobina, ou seja, menos enrolamentos.

A simulação do espaço dos estados comparado com o circuito simulado permitiu concluir que o erro analítico do modelo é quase nulo dado que as respostas em regime permanente de ambos coincidem sendo apenas um pouco diferente os seus regimes transitórios.

O estudo do pequeno sinal permitiu simplificar o espaço dos estados no sentido em que deixa de existir a necessidade de, numa mudança de variáveis de entrada do conversor, seja da matriz  $U$  ou do duty-cycle, recomeçar o modelo com condições iniciais não nulas. No entanto verifica-se um erro que incrementa com a amplitude do pequeno sinal, ou seja, este modelo assenta de melhor forma para variações muito pequenas relativamente ao ponto de funcionamento do que se o pequeno sinal for considerável.

## 5.2 Trabalho Futuro

Depois de se validar resultados na topologia bidirecional, haverá a necessidade da projeção de um controlador de forma à resposta ser o mais breve possível e idealmente sem overshoot.

Com o modelo simulado do controlador bem validado poderá se passar para a experimentação física do conversor proposto. Estes passos serão o trabalho a realizar futuramente, tendo como base o estudo realizado e abrangido neste documento.

## Capítulo 6

# Referências Bibliográficas

1. C. Li, L. Herrera, J. Jia, L. Fu, A. Isurin, A. Cook, Y. Huang and J. Wang, Design and Implementation of a Bidirectional Isolated Cuk Converter for Low-Voltage and High-Current Automotive DC Source Applications, IEEE Trans. Vehicular Technology, vol. 63, no. 6, July 2014
2. A Natural ZVS Medium-Power Bidirectional DC?DC Converter With Minimum Number of Devices; Hui Li, Senior Member, IEEE, Fang Zheng Peng, Senior Member, IEEE, and J. S. Lawler, Senior Member, IEEE
3. Analysis of the Auxiliary Resonant Commutated Pole Inverter; Walters Eric A., Wasynczuk Oleg
4. Overview of Dual-Active-Bridge Isolated Bidirectional DC-DC Converter for High-Frequency Link Power-Conversion System; Biao Zhao, Student Member, IEEE, Qiang Song, Member, IEEE, Wenhua Liu, Member, IEEE, and Yandong Sun
5. R. Erickson and D. Maksimovic, Fundamentals of Power Electronics - Second Edition
6. Efficiency of the Transformer Cuk PWM Converter; Manikantan K. Jutty and Marian K. Kazimierczuk, Senior Member IEEE



# Anexos A

Nesta secção será mostrado o script utilizado no software MAPLE para a descoberta das funções transferência genéricas para o conversor Cuk.

```
with(LinearAlgebra);
R[L1] := 'R[L1]'; R[L2] := 'R[L2]';
R[C1] := 'R[C1]'; R[C2] := 'R[C2]';
R[Son] := 'R[Son]'; R[D] := 'R[Don]';
R[o] := 'R[o]'; N := 'N'; z := 'duty'; lol := 'Du'; s := 's'; L[1] := 'L[1]'; L[2] := 'L[2]';
C[1] := 'C[1]'; C[2] := 'C[2]';
V[C1] := 'V[C1]'; V[C2] := 'V[C2]'; V[o] := 'V[o]'; V[i] := 'V[i]'; V[D] := 'V[D]';
Y[L1] := 'I[L1]'; Y[L2] := 'I[L2]';
Fs := 'Fs';
M[ON] := Matrix(5, 5, (1, 1) = z, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) =
z, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = z, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0,
(4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = z, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5, 5) = z);
M[OFF] := Matrix(5, 5, (1, 1) = lol, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2,
2) = lol, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = lol, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4,
1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = lol, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5,
5) = lol);
K := Matrix(5, 5, (1, 1) = L[1], (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) =
L[2], (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = C[1], (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4,
1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = C[2], (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5,
5) = 1);
A[IDEALON] := Matrix(5, 5, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0,
(2, 2) = 0, (2, 3) = N, (2, 4) = -1, (2, 5) = -1, (3, 1) = 0, (3, 2) = -N, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0,
(4, 1) = 0, (4, 2) = 1, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5,
5) = 0);
A[IDEALOFF] := Matrix(5, 5, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = -1, (1, 4) = 1/N, (1, 5) = 0, (2, 1)
= 0, (2, 2) = 0, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = -1, (3, 1) = 1, (3, 2) = 0, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) =
0, (4, 1) = -1/N, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) =
0, (5, 5) = 0);
```

$A[RL1] := \text{Matrix}(5, 5, (1, 1) = -R[L1], (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = 0, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5, 5) = 0);$

$A[RL2] := \text{Matrix}(5, 5, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = -R[L2], (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5, 5) = 0);$

$A[RC1ON] := \text{Matrix}(5, 5, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = R[C1] * N^2, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5, 5) = 0);$

$A[RC2ON] := \text{Matrix}(5, 5, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = -R[C2], (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5, 5) = 0);$

$A[RC1OFF] := \text{Matrix}(5, 5, (1, 1) = -R[C1], (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = 0, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5, 5) = 0);$

$A[RC2OFF] := \text{Matrix}(5, 5, (1, 1) = R[C2]/N^2, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = 0, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5, 5) = 0);$

$A[RSon] := \text{Matrix}(5, 5, (1, 1) = -R[Son], (1, 2) = -N * R[Son], (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = R[Son] * N, (2, 2) = R[Son] * N^2, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5, 5) = 0);$

$A[RD] := \text{Matrix}(5, 5, (1, 1) = R[D]/N^2, (1, 2) = R[D]/N, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = -R[D]/N, (2, 2) = -R[D], (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5, 5) = 0);$

$A[ON1] := (1/K).(A[IDEALON] + A[RC1ON] + A[RC2ON] + A[RSon]); A[OFF1] := (1/K).(A[IDEALOFF] + A[RC1OFF] + A[RC2OFF] + A[RD]);$

$A[T] := M[OFF].A[OFF1] + M[ON].A[ON1] + (1/K).(A[RL1] + A[RL2]); A[D] := A[ON1] - A[OFF1];$

$A[T] := A[T] + R[o] * \text{Matrix}(5, 5, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = 0, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = A[T][2, 1], (5, 2) = A[T][2, 2], (5, 3) = A[T][2, 3], (5, 4) = A[T][2, 4], (5, 5) = A[T][2, 5]);$

$A[D] := A[D] + R[o]*Matrix(5, 5, (1, 1) = 0, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = 0, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = 0, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = 0, (4, 5) = 0, (5, 1) = A[D][2, 1], (5, 2) = A[D][2, 2], (5, 3) = A[D][2, 3], (5, 4) = A[D][2, 4], (5, 5) = A[D][2, 5]);$

$B[IDEAL] := (1/K).(Matrix(5, 2, (1, 1) = 1, (1, 2) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0));$

$B[VD] := (1/K).(Matrix(5, 2, (1, 1) = 0, (1, 2) = -1/N, (2, 1) = 0, (2, 2) = -1, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = -R[o]/L[2]));$

$B[T] := M[OFF].B[VD] + B[IDEAL]; B[D] := -B[VD];$

$X := Vector(5, (1) = Y[L1], (2) = Y[L2], (3) = V[C1], (4) = V[C2], (5) = V[o]);$

$S := Matrix(5, 5, (1, 1) = s, (1, 2) = 0, (1, 3) = 0, (1, 4) = 0, (1, 5) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = s, (2, 3) = 0, (2, 4) = 0, (2, 5) = 0, (3, 1) = 0, (3, 2) = 0, (3, 3) = s, (3, 4) = 0, (3, 5) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = 0, (4, 3) = 0, (4, 4) = s, (4, 5) = 0, (5, 1) = 0, (5, 2) = 0, (5, 3) = 0, (5, 4) = 0, (5, 5) = s);$

$U := Vector(2, (1) = V[i], (2) = V[D]);$

$funcao[dXdU] := DeleteColumn(ReducedRowEchelonForm('<|>'('<,>'(S-A[T]), '<,>'(B[T]))), [1, 2, 3, 4, 5]);$

$transferenciai := simplify(eval(funcao[dXdU], [lol = 1-z, R[L1] = 0, R[L2] = 0, R[C1] = 0, R[C2] = 0, R[Son] = 0, R[D] = 0]), size);$

$ganhosdci := simplify(eval(transferenciai, [s = 0]), size);$

$transferenciaideal := simplify(eval(funcao[dXdU], [lol = 1-z, R[L1] = 0, R[L2] = 0, R[C1] = 0, R[C2] = 0, R[Son] = 0, R[D] = 0, C[1] = 0.3e-5, C[2] = 0.3e-5, L[1] = 0.7125e-3, L[2] = 0.1105e-1]), size);$

$ganhosdcideais := simplify(eval(transferenciaideal, [s = 0]), size);$

$transferenciar := simplify(eval(funcao[dXdU], [lol = 1-z]), size);$

$ganhosdcr := simplify(eval(transferenciar, [s = 0]), size);$

$transferenciareal := simplify(eval(funcao[dXdU], [lol = 1-z, R[L1] = .5, R[L2] = .5, R[C1] = 0.5e-1, R[C2] = 0.5e-1, R[Son] = .55, R[D] = 0.25e-1, V[D] = .7, C[1] = 0.3e-5, C[2] = 0.3e-5, L[1] = 0.7125e-3, L[2] = 0.1105e-1]), size);$

$ganhosdcreais := simplify(eval(transferenciareal, [s = 0]), size);$

$rendimento := simplify((ganhosdcreais[5,1].U[1]+ganhosdcreais[5,2].U[2])^2/(R[o]*U[1]*(ganhosdcreais[1,1].size));$

$small := A[D].ganhosdcr+B[D];$

$funcao[xdt] := DeleteColumn(ReducedRowEchelonForm('<|>'('<,>'(S-A[T]), '<,>'(small))), [1, 2, 3, 4, 5]);$

$funcao[xdi] := simplify(eval(funcao[xdt].U, [lol = 1-z, R[L1] = 0, R[L2] = 0, R[C1] = 0, R[C2] = 0, R[Son] = 0, R[D] = 0, C[1] = 0.3e-5, C[2] = 0.3e-5, L[1] = 0.7125e-3, L[2] = 0.1105e-1, V[D] = 0]), size);$

$ganhosdcsmallideal := simplify(eval(funcao[xdi], [s = 0]), size);$

```

funcao[xdr] := simplify(eval(funcao[xdt].U, [lol = 1-z, R[L1] = .5, R[L2] = .5, R[C1] = 0.5e-1,
R[C2] = 0.5e-1, R[Son] = .55, R[D] = 0.25e-1, V[D] = .7, C[1] = 0.3e-5, C[2] = 0.3e-5, L[1] =
0.7125e-3, L[2] = 0.1105e-1]), size);
ganhosdcsmallreal := simplify(eval(funcao[xdr], [s = 0]), size);
funcaod := simplify(eval(funcao[xdt].U, [lol = 1-z]), size);
ganhosd := simplify(eval(funcaod, [s = 0]), size);

```



# Anexos B

Nesta secção serão mostradas algumas funções transferência de grandes dimensões.

$$\frac{i_{L1}}{v_i}(s) = - \frac{N^2 \left( \left( (sL_2 + (R_{Son} + R_{C1})N^2 + R_{C2} - R_{Don})D + R_{L2} + R_{Don} + R_o \right) sC_2 + D^2 \right) C_1 + N^2 C_2 D^2}{\left( \left( \begin{aligned} &-N^2 s^2 L_1 L_2 + \left( \left( \frac{R_{Don} L_1 + R_{C1} L_2 - R_{C2} L_1 - L_2 R_{Son}}{L_2 (R_{C2} + R_{Don} - L_1 (R_{Son} + R_{C1}) N^4)} \right) D + (-R_o L_1 - L_2 R_{L1} - L_1 R_{L2} - R_{Don} L_1 - R_{C1} L_2) N^2 - L_2 (R_{C2} + R_{Don}) \right) s + (R_{C1} N^2 + R_{C2})^2 D^2 \\ &+ \left( (-R_{Son} + R_{C1})(R_{C1} + R_{L1}) N^4 + \left( \frac{R_{C1} + R_{L1}}{+(-R_{L1} - R_{Son}) R_{C2} - R_{Son} (R_o + R_{L2})} \right) R_{Don} + (-2R_{C2} + R_{L2} + R_o) R_{C1} \right) N^2 + (R_{C2} + R_o + R_{L2}) R_{Don} + R_{C2} (R_{L2} - R_{C2} + R_o) \right) D - (R_{C1} + R_{L1})(R_{L2} + R_{Don} + R_o) N^2 + (-R_{C2} - R_o - R_{L2}) R_{Don} - R_{C2} (R_o + R_{L2}) \\ &+ \left( (R_{C1} - R_{L1}) N^2 - R_{L2} + R_{C2} - R_o \right) D^2 + \left( \frac{(-R_{C1} - R_{Son}) N^2}{+2R_{L2} + R_{Don} + 2R_o - R_{C2}} \right) D - R_{Don} - R_o - R_{L2} \end{aligned} \right) sC_2 + \left( (-L_1 N^2 - L_2) D^2 + 2L_2 D - L_2 \right) s \right) C_1 - N^2 \left( (L_1 N^2 + L_2) D^2 - 2L_2 D + L_2 \right) s + ((R_{L1} - R_{C1}) N^2 + R_{L2} - R_{C2} + R_o) D^2 + ((R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) D + R_{L2} + R_{Don} + R_o \right) C_2} \quad (6.1)$$

$$\frac{i_{L1}}{v_D}(s) = - \frac{N(-1+D) \left( \left( s \left( (R_{C1} N^2 + R_{C2}) (D) + sL_2 + R_o + R_{L2} \right) C_2 + D \right) C_1 + (D) C_2 N^2 \right)}{\left( \left( (R_{C1} N^2 + R_{C2})^2 D^2 + \left( \frac{(-L_1 (R_{Son} + R_{C1}) N^4 + (R_{Don} L_1 + R_{C1} L_2 - R_{C2} L_1 - L_2 R_{Son}) N^2 + L_2 (R_{C2} + R_{Don}) s - (R_{Son} + R_{C1})(R_{C1} + R_{L1}) N^4 + ((-2R_{C2} + R_{Don} + R_o + R_{L2}) R_{C1} + (-R_{L1} - R_{Son}) R_{C2} + R_{Don} R_{L1} - R_{Son} (R_o + R_{L2})) N^2 - R_{C2}^2 + (R_{L2} + R_{Don} + R_o) R_{C2} + R_{Don} (R_o + R_{L2})}{(R_{C1} + R_{L1})(R_{L2} + R_{Don} + R_o) N^2 + (-R_{Don} - R_o - R_{L2}) R_{C2} - R_{Don} (R_o + R_{L2})} \right) D - N^2 s^2 L_1 L_2 + \left( (-R_o L_1 - L_2 R_{L1} - L_1 R_{L2} - R_{Don} L_1 - R_{C1} L_2) N^2 - L_2 (R_{C2} + R_{Don}) \right) s - \left( (R_{L1} - R_{C1}) N^2 + R_{L2} - R_{C2} + R_o \right) D^2 + \left( (-L_1 N^2 - L_2) s + (R_{C1} - R_{L1}) N^2 + R_{C2} - R_{L2} - R_o \right) D^2 + \left( (-2sL_2 + (R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2 \right) C_2 \right) C_1 - N^2 \left( \left( \frac{(L_1 N^2 + L_2) s + (R_{L1} - R_{C1}) N^2 + R_{L2} - R_{C2} + R_o}{(-2sL_2 + (R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2} \right) D^2 + \left( (-L_1 N^2 - L_2) s + (R_{C1} - R_{L1}) N^2 + R_{C2} - R_{L2} - R_o \right) D^2 + \left( (-2sL_2 + (R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2 \right) C_2 \right) C_2} \quad (6.2)$$

$$\frac{i_{L2}}{v_i}(s) = \frac{N \left( \left( \left( (-R_{Don} + R_{Son} N^2) (D) + R_{Don} \right) sC_2 - D + D^2 \right) C_1 + N^2 (D) C_2 (-1+D) \right)}{\left( \left( (R_{C1} N^2 + R_{C2})^2 D^2 + \left( \frac{(-L_1 (R_{Son} + R_{C1}) N^4 + (R_{Don} L_1 + R_{C1} L_2 - R_{C2} L_1 - L_2 R_{Son}) s + (R_{C1} + R_{L1}) R_{Don} + (-2R_{C2} + R_{L2} + R_o) R_{C1} + (-R_{L1} - R_{Son}) R_{C2} - R_{Son} (R_o + R_{L2})) N^2 - R_{C2}^2 + (R_{L2} + R_{Don} + R_o) R_{C2} + R_{Don} (R_o + R_{L2})}{(R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2) (R_{C1} + R_{L1} + sL_1) N^2 - L_2 (R_{C2} + R_{Don}) s + (-R_{C2} - R_o - R_{L2}) R_{Don} - R_{C2} (R_o + R_{L2})} \right) D - N^2 s^2 L_1 L_2 + \left( (-R_o L_1 - L_2 R_{L1} - L_1 R_{L2} - R_{Don} L_1 - R_{C1} L_2) N^2 - L_2 (R_{C2} + R_{Don}) \right) s - \left( (R_{L1} - R_{C1}) N^2 + R_{L2} - R_{C2} + R_o \right) D^2 + \left( (-L_1 N^2 - L_2) s + (R_{C1} - R_{L1}) N^2 + R_{C2} - R_{L2} - R_o \right) D^2 + \left( \frac{2sL_2 + (-R_{C1} - R_{Son}) N^2 + R_{Don} + 2R_{L2} - R_{C2} + 2R_o}{2R_{L2} - R_{C2} + 2R_o} \right) (D) - R_{L2} - R_{Don} \right) C_1 - N^2 \left( \left( (R_{L1} + sL_1 - R_{C1}) N^2 + R_{L2} + R_o - R_{C2} + sL_2 \right) D^2 + \left( \frac{(R_{L1} + sL_1 - R_{C1}) N^2 + R_{L2} + R_o - R_{C2} + sL_2}{(R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}} \right) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2 \right) C_2} \quad (6.3)$$

$$\frac{i_{L2}}{v_D}(s) = \frac{-D' \left( \left( \left( (R_{C1} N^2 + R_{C2}) (D) - sL_1 N^2 + (-R_{C1} - R_{L1}) N^2 - R_{C2} \right) sC_2 - 1 + D \right) C_1 + N^2 C_2 (-1+D) \right)}{\left( \left( (R_{C1} N^2 + R_{C2})^2 D^2 + \left( \frac{(-L_1 (R_{Son} + R_{C1}) N^4 + (R_{Don} L_1 + R_{C1} L_2 - R_{C2} L_1 - L_2 R_{Son}) N^2 + L_2 (R_{C2} + R_{Don}) s - (R_{Son} + R_{C1})(R_{C1} + R_{L1}) N^4 + ((-2R_{C2} + R_{Don} + R_o + R_{L2}) R_{C1} + (-R_{L1} - R_{Son}) R_{C2} + R_{Don} R_{L1} - R_{Son} (R_o + R_{L2})) N^2 - R_{C2}^2 + (R_{L2} + R_{Don} + R_o) R_{C2} + R_{Don} (R_o + R_{L2})}{(R_{C1} + R_{L1})(R_{L2} + R_{Don} + R_o) N^2 + (-R_{Don} - R_o - R_{L2}) R_{C2} - R_{Don} (R_o + R_{L2})} \right) D - N^2 s^2 L_1 L_2 + \left( (-R_o L_1 - L_2 R_{L1} - L_1 R_{L2} - R_{Don} L_1 - R_{C1} L_2) N^2 - L_2 (R_{C2} + R_{Don}) \right) s - \left( (R_{L1} - R_{C1}) N^2 + R_{L2} - R_{C2} + R_o \right) D^2 + \left( (-L_1 N^2 - L_2) s + (R_{C1} - R_{L1}) N^2 + R_{C2} - R_{L2} - R_o \right) D^2 + \left( (-2sL_2 + (R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2 \right) C_2 \right) C_1 - N^2 \left( \left( \frac{(L_1 N^2 + L_2) s + (R_{L1} - R_{C1}) N^2 + R_{L2} - R_{C2} + R_o}{+(-2sL_2 + (R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2} \right) D^2 + \left( (-L_1 N^2 - L_2) s + (R_{C1} - R_{L1}) N^2 + R_{C2} - R_{L2} - R_o \right) D^2 + \left( (-2sL_2 + (R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2 \right) C_2 \right) C_2} \quad (6.4)$$

$$\frac{v_{C1}}{v_i}(s) = \frac{N^2 \left( (R_{C1} N^2 + R_{C2}) D^2 + \left( (-R_{C1} - R_{Son}) N^2 + R_o + R_{Don} - R_{C2} + sL_2 + R_{L2} \right) (D) - R_o - R_{Don} - sL_2 - R_{L2} \right) C_2}{\left( \left( (R_{C1} N^2 + R_{C2})^2 D^2 + \left( \frac{(-R_{Son} + R_{C1})(R_{C1} + R_{L1} + sL_1) N^4 + ((R_{Don} L_1 + R_{C1} L_2 - R_{C2} L_1 - L_2 R_{Son}) s + (-2R_{C2} + R_{Don} + R_o + R_{L2}) R_{C1} + (-R_{L1} - R_{Son}) R_{C2} + R_{Don} R_{L1} - R_{Son} (R_o + R_{L2})) N^2 + L_2 \left( \frac{R_{C2}^+}{R_{Don}} \right) s - R_{C2}^2 + (R_{L2} + R_{Don} + R_o) R_{C2} + R_{Don} (R_o + R_{L2})}{- (R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2) (R_{C1} + R_{L1} + sL_1) N^2 - L_2 (R_{C2} + R_{Don}) s + (-R_{Don} - R_o - R_{L2}) R_{C2} - R_{Don} (R_o + R_{L2})} \right) D \right) sC_1 - N^2 \left( \left( \frac{(R_{L1} + sL_1 - R_{C1}) N^2 + R_{L2} + R_o - R_{C2} + sL_2}{(-2sL_2 + (R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2} \right) D^2 + \left( (-L_1 N^2 - L_2) s + (R_{C1} - R_{L1}) N^2 + R_{C2} - R_{L2} - R_o \right) D^2 + \left( (-2sL_2 + (R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2 \right) C_2 - \left( \frac{(R_{L1} + sL_1 - R_{C1}) N^2 + R_{L2} + R_o - R_{C2} + sL_2}{+(-2sL_2 + (R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2} \right) C_1} \quad (6.5)$$

$$\frac{v_{C1}}{v_D}(s) = \frac{NC_2(-1+D) \left( \left( (L_1 N^2 + L_2) s + R_o + R_{L2} + N^2 R_{L1} \right) (D) - R_o - sL_2 - R_{L2} \right)}{\left( \left( (R_{C1} N^2 + R_{C2})^2 D^2 + \left( \frac{(-L_1 (R_{Son} + R_{C1}) N^4 + (R_{C1} L_2 - R_{C2} L_1 - L_2 R_{Son}) N^2 + L_2 (R_{C2} + R_{Don}) s - (R_{Son} + R_{C1})(R_{C1} + R_{L1}) N^4 + \left( \frac{(-2R_{C2} + R_{Don} + R_o + R_{L2}) R_{C1} + (-R_{L1} - R_{Son}) R_{C2} + R_{Don} R_{L1} - R_{Son} (R_o + R_{L2})) N^2}{-R_{C2}^2 + (R_{L2} + R_{Don} + R_o) R_{C2} + R_{Don} (R_o + R_{L2})} \right) D - N^2 s^2 L_1 L_2 + \left( (-R_o L_1 - L_2 R_{L1} - L_1 R_{L2} - R_{Don} L_1 - R_{C1} L_2) N^2 - L_2 (R_{C2} + R_{Don}) \right) s - (R_{C1} + R_{L1})(R_{L2} + R_{Don} + R_o) N^2 + (-R_{Don} - R_o - R_{L2}) R_{C2} - R_{Don} (R_o + R_{L2}) \right) sC_1 - N^2 \left( \left( (L_1 N^2 + L_2) s + (R_{L1} - R_{C1}) N^2 + R_{L2} - R_{C2} + R_o \right) D^2 + \left( \frac{(R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}}{+R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2} \right) D \right) C_2 - \left( \left( (L_1 N^2 + L_2) s + (R_{L1} - R_{C1}) N^2 + R_{L2} - R_{C2} + R_o \right) D^2 + \left( \frac{(-2sL_2 + (R_{Son} + R_{C1}) N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2}{+R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2} \right) D \right) C_1} \quad (6.6)$$



$$\frac{v_{C2}}{v_i}(s) = - \frac{N \left( (R_{CI}N^2 + R_{C2})D^2 + (-R_{CI} - R_{Son})N^2 + R_o + R_{Don} - R_{C2} + sL_2 + R_{L2} \right) (D) - R_o - R_{Don} - sL_2 - R_{L2}}{\left( (R_{CI}N^2 + R_{C2})^2 D^2 + \left( \begin{array}{c} (R_{Don}L_1 + R_{CI}L_2 - R_{C2}L_1 - L_2R_{Son})s + \\ (-2R_{C2} + R_{Don} + R_o + R_{L2})R_{CI} + (-R_{LI} - R_{Son})R_{C2} + R_{Don}R_{LI} - R_{Son}(R_o + R_{L2}) \\ (R_o + R_{L2}) \end{array} \right) N^2 + L_2(R_{C2} + R_{Don})s - R_{C2}^2 + (R_{L2} + R_{Don} + R_o)R_{C2} + R_{Don} \right) (D) - \left( \begin{array}{c} (R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2)(R_{CI} + R_{LI} + sL_1)N^2 - L_2(R_{C2} + R_{Don})s + (-R_{Don} - R_o - R_{L2})R_{C2} - R_{Don}(R_o + R_{L2}) \\ -R_{L2} - R_{Don} - sL_2 - R_o \end{array} \right) sC_2 + \left( (-sL_1 + R_{CI} - R_{LI})N^2 + R_{C2} - sL_2 - R_o - R_{L2} \right) D^2 + \left( (-R_{CI} - R_{Son})N^2 + R_{Don} + 2R_{L2} - R_{C2} + 2R_o \right) D \right)^D C_1 - N^2 \left( \begin{array}{c} (R_{LI} + sL_1 - R_{CI})N^2 + R_{L2} + R_o - R_{C2} + sL_2 \\ + (-2sL_2 + (R_{Son} + R_{CI})N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2}) \end{array} \right) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2 \right) C_2 \quad (6.7)$$

$$\frac{v_{C2}}{v_D}(s) = - \frac{(-1 + D) \left( \left( (L_1N^2 + L_2)s + R_o + R_{L2} + N^2R_{LI} \right) (D) - R_o - sL_2 - R_{L2} \right) C_1}{\left( \left( (R_{CI}N^2 + R_{C2})^2 D^2 + \left( \begin{array}{c} (R_{Son} + R_{CI})N^4 + (R_{Don}L_1 + R_{CI}L_2 - R_{C2}L_1 - L_2R_{Son})N^2 + L_2(R_{C2} + R_{Don}) \\ (R_{Son} + R_{CI})(R_{CI} + R_{LI})N^4 + \left( \begin{array}{c} -2R_{C2} + R_{Don} + R_o + R_{L2} \\ (-R_{LI} - R_{Son})R_{C2} + R_{Don}R_{LI} - R_{Son}(R_o + R_{L2}) \end{array} \right) N^2 - R_{C2}^2 + (R_{L2} + R_{Don} + R_o)R_{C2} + R_{Don}(R_o + R_{L2}) \end{array} \right) D \right) sC_2 + \left( \begin{array}{c} (-L_1N^2 - L_2)s + \\ (R_{CI} - R_{LI})N^2 + R_{C2} - R_{L2} - R_o \end{array} \right) D^2 + \left( (-R_{CI} - R_{Son})N^2 + R_{Don} + 2R_{L2} - R_{C2} + 2R_o \right) (D) - R_{L2} - R_{Don} - sL_2 - R_o \right) C_1 - N^2 \left( \left( (L_1N^2 + L_2)s + (R_{LI} - R_{CI})N^2 + R_{L2} - R_{C2} + R_o \right) D^2 + \left( \begin{array}{c} -2sL_2 + (R_{Son} + R_{CI})N^2 \\ + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2} \end{array} \right) (D) + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2 \right) C_2 \right) \quad (6.8)$$

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{R_o N \left( \left( \left( (-R_{Don} + R_{Son}N^2)(D) + R_{Don} \right) sC_2 - D + D^2 \right) C_1 + N^2(D)C_2(-1 + D) \right)}{\left( \left( (R_{CI}N^2 + R_{C2})^2 D^2 + \left( \begin{array}{c} (R_{Don}L_1 + R_{CI}L_2 - R_{C2}L_1 - L_2R_{Son})s + \\ (-2R_{C2} + R_{Don} + R_o + R_{L2})R_{CI} \\ (R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2)(R_{CI} + R_{LI} + sL_1)N^2 - L_2(R_{C2} + R_{Don})s + (-R_{C2} - R_o - R_{L2})R_{Don} - R_{C2}(R_o + R_{L2}) \end{array} \right) N^2 + L_2(R_{C2} + R_{Don})s + (-R_{C2} - R_o - R_{L2})R_{Don} - R_{C2}(R_o + R_{L2}) \right) D - \left( \begin{array}{c} (-R_{Son} + R_{CI})(R_{CI} + R_{LI} + sL_1)N^4 + \\ (R_{CI} + R_{LI})R_{Don} + (-2R_{C2} + R_{L2} + R_o)R_{CI} + (-R_{LI} - R_{Son})R_{C2} - R_{Son}(R_o + R_{L2}) \end{array} \right) N^2 + L_2(R_{C2} + R_{Don})s + (R_{C2} + R_o + R_{L2})R_{Don} + R_{C2}(R_{L2} - R_{C2} + R_o) \right) D - \left( \begin{array}{c} (-sL_1 + R_{CI} - R_{LI})N^2 + R_{C2} - sL_2 - R_o - R_{L2} \\ 2sL_2 + (-R_{CI} - R_{Son})N^2 + R_{Don} + 2R_{L2} - R_{C2} + 2R_o \end{array} \right) (D) - R_{L2} - R_{Don} - sL_2 - R_o \right) sC_2 + \left( \begin{array}{c} (-sL_1 + R_{CI} - R_{LI})N^2 + R_{C2} - sL_2 - R_o - R_{L2} \\ 2sL_2 + (-R_{CI} - R_{Son})N^2 + R_{Don} + 2R_{L2} - R_{C2} + 2R_o \end{array} \right) (D) - R_{L2} - R_{Don} - sL_2 - R_o \right) C_1 - N^2 \left( \left( (R_{LI} + sL_1 - R_{CI})N^2 + R_{L2} + R_o - R_{C2} + sL_2 \right) D^2 + (-2sL_2 + (R_{Son} + R_{CI})N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2})D + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2 \right) C_2 \right) \quad (6.9)$$

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{R_o(-1 + D) \left( \left( (R_{CI}N^2 + R_{C2})(D) - sL_1N^2 + (-R_{CI} - R_{LI})N^2 - R_{C2} \right) sC_2 - 1 + D \right) C_1 + N^2C_2(-1 + D) \right)}{\left( \left( (R_{CI}N^2 + R_{C2})^2 D^2 + \left( \begin{array}{c} (-L_1(R_{Son} + R_{CI})N^4 + (R_{Don}L_1 + R_{CI}L_2 - R_{C2}L_1 - L_2R_{Son})N^2 \\ + L_2(R_{C2} + R_{Don}) \end{array} \right) s - (R_{Son} + R_{CI}) \right) D - N^2s^2L_1L_2 + \left( \begin{array}{c} (-R_oL_1 - L_2R_{LI} - L_1R_{L2} - R_{Don}L_1 - R_{CI}L_2)N^2 - L_2(R_{C2} + R_{Don})s - (R_{CI} + R_{LI})(R_{L2} + R_{Don} + R_o)N^2 + (-R_{Don} - R_o - R_{L2})R_{C2} - R_{Don}(R_o + R_{L2}) \end{array} \right) \right) sC_2 + \left( \begin{array}{c} (-L_1N^2 - L_2)s + (R_{CI} - R_{LI})N^2 + R_{C2} - R_{L2} - R_o \\ 2sL_2 + (-R_{CI} - R_{Son})N^2 + R_{Don} + 2R_{L2} - R_{C2} + 2R_o \end{array} \right) (D) - R_{L2} - R_{Don} - sL_2 - R_o \right) C_1 - N^2 \left( \left( (L_1N^2 + L_2)s + (R_{LI} - R_{CI})N^2 + R_{L2} - R_{C2} + R_o \right) D^2 + (-2sL_2 + (R_{Son} + R_{CI})N^2 + R_{C2} - R_{Don} - 2R_o - 2R_{L2})D + R_{L2} + R_{Don} + R_o + sL_2 \right) C_2 \right) \quad (6.10)$$